Foglio di esercizi su applicazioni lineari e matrici, cambiamenti di base

Sansonetto Nicola*

Esercizio 1 (Punti 8)**.** Le matrici quadrate reali R $n \times n$ tali che $det(R) = 1$ (determinante unitario) e che $R^{-1} = R^T$ (l'inversa coincide con la trasposta) si chiamano matrici ortogonali speciali $n \times n$. Dimostrare che l'insieme delle matrici ortogonali speciali $n \times n$ forma un gruppo rispetto alla moltiplicazione righe per colonne.

Esercizio 2 (Punti 8)**.** Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $f(x, y, z) = [x + y, x + y, z]^T$.

1. Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica.
2. Determinare $Ker(f)$ e $Im(f)$.
3. Mostrare che l'insieme $\mathcal{B} = \{b_1 := 1, 1, -1]^T$, $b_2 := [1, 1, 0]^T$, $b_3 := [1, -1, 0]^T\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
4. Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica nel dominio e alla base $\mathcal{B}$ nel codominio.

Esercizio 3 (Punti 8)**.** Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $f_\alpha(x, y, z) = [-x + (2 - \alpha)y + z,\ x - y + z,\ x - y + (4 - \alpha)z]^T$.

1. Scrivere la matrice associata a f_α rispetto alla base canonica su dominio e codominio.
2. Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ f_α è iniettiva.
3. Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ f_α è suriettiva.
4. Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il vettore $[1, 1, 1]^T \in Im(f_\alpha)$.
5. Determinare $Ker(f_1)$.
6. Costruire, se possibile, un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $Im(g) = Im(f_0)$.
7. Costruire, se possibile, un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $Ker(h) = Ker(f_1)$.

Esercizio 4 (Punti 6)**.** ☻ Si consideri al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la famiglia di applicazioni lineari $T_\alpha : \mathbb{R}^3 \longrightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definite da $T_\alpha(x, y, z) = \begin{bmatrix} x + \alpha y & 0 \\ z & x - \alpha y \end{bmatrix}$.

1. Scrivere la matrice associata a T_α rispetto alle basi canoniche degli spazi in questione.
2. Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $Ker(T_\alpha)$ e $Im(T_\alpha)$.
3. Data la matrice $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, determinare la preimmagine di B relativa a T_α.
4. Posto $\alpha = 1$ e definita la matrice $B_\mu = \begin{bmatrix} 1 & \mu \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, determinare la preimmagine di B_μ rispetto a T_1, al variare di $\mu \in \mathbb{R}$.

N.B.
Il simbolo ☻ denota esercizi giudicati **difficile**.

*e-mail: nicola.sansonetto@gmail.com