

Probabilità II

Variabili casuali discrete

- Definizioni principali.
- Valore atteso e Varianza.
- Teorema di Bienaymé - Čebičev.
- V.C. Notevoli: Bernoulli e Binomiale.

Concetto di variabile casuale

- Cos'è una variabile casuale?

Idea di massima: una grandezza il cui valore dipende dall'esito di un accadimento dal risultato incerto.

- Perché abbia senso (e sia utile) debbo:
 - Definire cosa sia un accadimento dall'esito incerto
 - Distinguere i valori possibili da quello assunto.
 - Trovare un modo per discernere quali siano i valori più o meno probabili.

Concetto di variabile casuale

- Cos'è una variabile casuale?

Idea di massima: una grandezza il cui valore dipende dall'esito di un accadimento dal risultato incerto.

- Perché abbia senso (e sia utile) debbo:
 - Definire cosa sia un accadimento dall'esito incerto
(Nozioni di Esperimento, Esito ed Evento)
 - Distinguere i valori possibili da quello assunto.
(Modalità ed osservazione)
 - Trovare un modo per discernere quali siano i valori più o meno probabili.
(Calcolo delle probabilità)

Variabile casuale: definizione

Definizione: una variabile casuale è una grandezza il cui valore è legato al verificarsi di un evento.

- Una v.c. viene descritta completamente associando ad ogni modalità la probabilità che questa sia osservata.
- Il tipo di associazione cambia a seconda del tipo di v.c.
 - Discrete: distribuzione di probabilità.
 - Continue: densità di probabilità.
- *Nota:* a volte si parla di variabili stocastiche o aleatorie. Esse sono sinonime di v.c.

Variabile casuale: notazioni

- Una v.c. viene identificata con una lettera maiuscola
 - Y : esito del lancio di un dado a 6 facce.
 - X : # mezzi pubblici usati da un veronese l'8/11/2010.
- Le modalità si indicano con la lettera minuscola.
 - $y_1 = 1; y_2 = 2; y_3 = 3; y_4 = 4; y_5 = 5; y_6 = 6$.
 - $x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 2; x_4 = 3; x_5 = 4; \dots$
- L'evento “osservazione della i -sima modalità” si indica
 - $Y = y_i \Rightarrow P(Y = y_i)$: probabilità che si osservi la modalità y_i .
 - $X = x_i \Rightarrow P(X = x_i)$: probabilità l'estratto abbia preso un mezzo.

Variabile casuale discreta

Definita univocamente dalla distribuzione di probabilità.

- Distribuzione di probabilità: possiamo considerarla come una funzione reale di numeri reali così definita

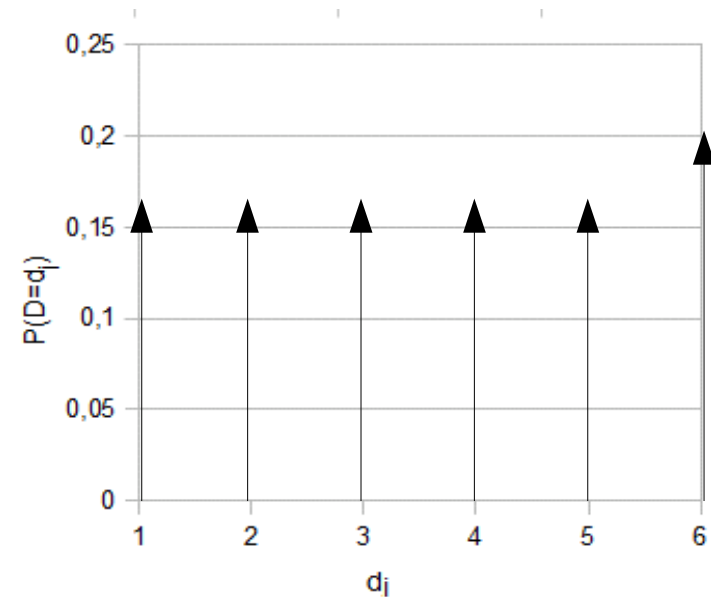
$$p(x) = P(X = x)$$

- Esempio D : esito del lancio di un dado a 6 facce truccato.

- tabellare

d_i	$P(D=d_i)$
1	0,160
2	0,160
3	0,160
4	0,160
5	0,160
6	0,200
tot	1,000

- grafica



Valore atteso $E[.]$

- Anche per una v.c. si può definire un indice di posizione che sintetizzi la distribuzione di probabilità.

- Valore atteso $E[X]$
a volte indicato con μ

$$E[X] = \sum_{i=1}^M P(X = x_i) x_i$$

$$E[X] = \sum_{i=1}^M p(x_i) x_i$$

- Esempio di calcolo

– D : lancio di un dado a 6 facce truccato.

$$E[D] = \sum_{i=1}^M d_i p(d_i)$$

$$E[D] = 1 \cdot 0,16 + 2 \cdot 0,16 + 3 \cdot 0,16 + 4 \cdot 0,16 + 5 \cdot 0,16 + 6 \cdot 0,2$$

$$E[D] = 3,6$$

d_i	$P(D=d_i)$	$p(d_i)d_i$
1	0,160	0,160
2	0,160	0,320
3	0,160	0,480
4	0,160	0,640
5	0,160	0,800
6	0,200	1,200
	1,000	3,600

Valore atteso $E[.]$: interpretazione

- Osservazione: $E[.]$ non è una modalità, come la media.
- Osservazione: $E[X]$ descrive l'esito di diverse estrazioni tutte uguali (concetto da definire) di X .
- Prove indipendenti ed identicamente distribuite (i. i. d.):
 - Indipendenti: l'esito di una prova non influenza le successive.
 - Identicamente distribuite: tutte le prove hanno la stessa $p(x)$.
- $E[X]$ descrive l'esito medio atteso a fronte di tante prove i.i.d.

Valore atteso $E[.]$: proprietà - I

- I valori attesi di due vv.cc. lineari fra loro, hanno lo stesso legame.

$$Y = c X \quad \rightarrow \quad E[Y] = c E[X] \quad \forall c \in \mathfrak{R}$$

– Esempio:

- X = costo del pane in euro al kg in Italia. $E[X] = 2.1$
- Y = costo del pane in euro all'etto in Italia.

$$Y = \frac{1}{10} X \quad \rightarrow \quad E[Y] = \frac{1}{10} E[X] = 0.21$$

- I valori attesi di due vv. cc. affini, hanno lo stesso legame.

$$Y = a X + b \quad \rightarrow \quad E[Y] = a E[X] + b \quad \forall a, b \in \mathfrak{R}$$

– Esempio

- X = temperatura a Verona misurata in °C. $E[X] = 14.7$
- Y = temperatura a Verona misurata in °F.

$$Y = 1.8 X + 57.6 \quad \rightarrow \quad E[Y] = 1.8 E[X] + 57.6 = 80.06$$

Valore atteso $E[.]$: proprietà - II

- Il valore atteso di una combinazione lineare di due vv. cc. è dato dalla stessa combinazione lineare dei loro valori attesi.

$$Z = c_1 X + c_2 Y \quad \rightarrow \quad E[Z] = c_1 E[X] + c_2 E[Y] \quad \forall c_1, c_2 \in \mathfrak{R}$$

– Esempio:

- X = consumo al km di una auto gpl $E[X] = 0.10$
- Y = pedaggio al km di una autostrada. $E[Y] = 0.07$
- Z = costo di un viaggio di 40 km di cui 30 in autostrada.

$$Z = 40 X + 30 Y \quad \rightarrow \quad E[Z] = 40 E[X] + 30 E[Y] = 6.1$$

- La proprietà si estende alla combinazione lineare di un numero qualunque (purché finito) di vv. cc.

$$Y = \sum_{i=1}^K c_i X_i \quad \rightarrow \quad E[Y] = \sum_{i=1}^K c_i E[X_i] \quad \forall c_i \in \mathfrak{R}$$

Varianza $Var[.]$ e deviazione standard

- Anche per le v.c. si può definire un indice di variabilità.

- Varianza $Var[X]$ $Var[X] = \sum_{i=1}^M P(X = x_i) (x_i - E[X])^2$

$$Var[X] = \sum_{i=1}^M p(x_i) (x_i - E[X])^2$$

$$Var[X] = \left(\sum_{i=1}^M x_i^2 p(x_i) \right) - (E[X])^2$$

- Deviazione Standard $sd = \sigma = \sqrt{Var[X]}$

- Esempio di calcolo

- D : lancio di un dado truccato. $E[D] = 3,6$

$$Var[D] = \left(\sum_{i=1}^M d_i^2 p(d_i) \right) - (E[D])^2$$

$$Var[D] = (16) - (3,6)^2 = 16 - 12,96 = 3,04$$

$$sd[D] = \sqrt{Var[D]} = \sqrt{3,04} = 1,74$$

d_i	$p(d_i)$	d_i^2	$p(d_i)d_i^2$
1	0,160	1	0,160
2	0,160	4	0,640
3	0,160	9	1,440
4	0,160	16	2,560
5	0,160	25	4,000
6	0,200	36	7,200
	1,000		16,000

Varianza $Var[.]$: proprietà - I

- Date due vv. cc. affini si ha la seguente relazione

$$Y = aX + b \rightarrow Var[Y] = a^2 Var[X] \quad \forall a, b \in \mathfrak{R}$$

- Esempio:

- X = temperatura a Verona misurata in °C. $Var[X] = 4.7$
- Y = temperatura a Verona misurata in °F.

$$Y = 1.8X + 57.6 \rightarrow Var[Y] = (1.8)^2 Var[X] = 15.228$$

- Osservazione: La costante di proporzionalità fra le vv. cc. a compare al quadrato nel legame fra le varianze. Questo fatto è facilmente interpretabile ricordando come la varianza esprima la media del quadrato degli scarti.
- Osservazione: La somma di una quantità nota ad una v.c. influenza il valore atteso ma non la varianza (e quindi la variabilità).

Varianza $Var[.]$: proprietà - II

- La varianza della somma o delle differenza di 2 vv. cc. indipendenti è data dalla somma delle varianze delle due vv. cc.

$$Z = X + Y \quad \rightarrow \quad Var[Z] = Var[X] + Var[Y]$$

$$Z = X - Y \quad \rightarrow \quad Var[Z] = Var[X] + Var[Y]$$

- Osservazione: la varianza della somma algebrica di due vv. cc. è destinata a crescere rispetto a quelle originali indipendentemente dal fatto che si le vv. cc. siano sommate o sottratte.

Valore atteso, varianza e probabilità

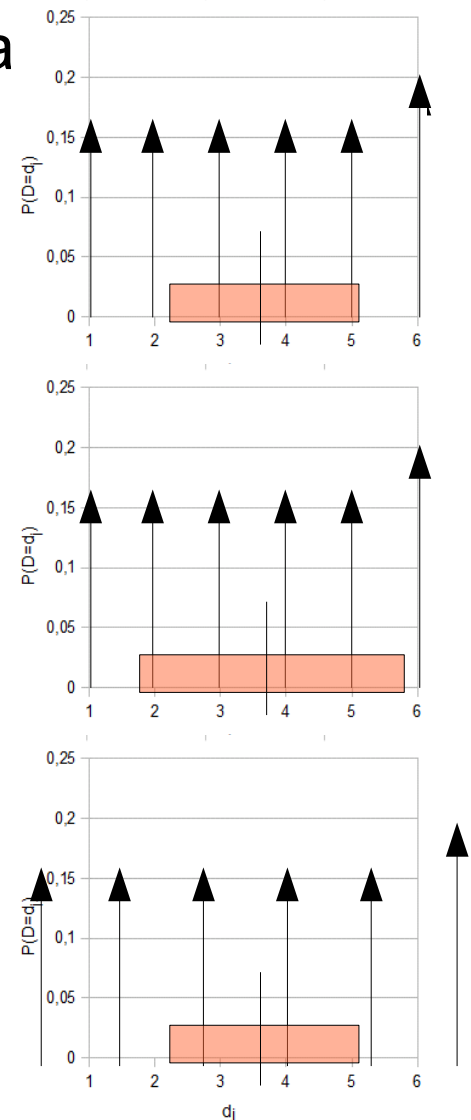
- Consideriamo un intervallo simmetrico rispetto a atteso di una v.c. X

$$I := [E[X] - \varepsilon; E[X] + \varepsilon]$$

- Come sarà la probabilità

$$p_s = P(X \in I)$$

- Maggiore è ε , maggiore sarà p_s
(considero un intervallo più grande)
- Se $Var[X]$ cresce, p_s diminuisce
(le realizzazioni tendono ad allontanarsi dal $E[X]$)



- Osservazioni: queste considerazioni sono legate al concetto di variabilità e non dipendono dal tipo di v.c. considerata.

Teorema di Bienaymé - Čebičev

- Si dimostra che: data una v.c. X con $E[X] = \mu$ e $Var[X] = \sigma^2$,
 - La probabilità che X assuma valori che si discostano dal suo valore atteso più ε non supera la varianza divisa per il quadrato di ε .

$$P(|X - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

- Considerando l'evento complementare si ha:

$$P(\mu - \varepsilon < X < \mu + \varepsilon) > 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

- Esempio: una v.c. X ha $E[X]=10$ e $Var[X]=1$, determinare un intervallo che abbia almeno il 60% di probabilità di contenere una osservazione.

$$1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \geq \frac{60}{100} \Rightarrow \frac{4}{10} \geq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \Rightarrow \varepsilon^2 \geq 10 \frac{\sigma^2}{4} \geq 2.5 \Rightarrow \varepsilon^2 \geq 2.5 \Rightarrow \varepsilon \geq 1.58$$

$$[8.42; 11.58]$$

V.c. (o prova) di Bernoulli

- Molto semplice: alcuni autori la chiamano prova Bernoulliana.
- V. c. discreta X con due modalità $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$.
- Le due probabilità solitamente hanno “nomi propri”
 - $p = P(X=1)$.
 - $q = P(X=0) = 1 - P(\overline{X=0}) = 1 - P(X=1) = 1 - p$.
- Valore atteso: $E[X] = p$.
 - Dimostrazione: $E[X] = \sum_{i=1}^2 p(x_i) x_i = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$
- Varianza: $Var[X] = pq$.
 - Dimostrazione: $Var[X] = \sum_{i=1}^2 p(x_i) (x_i - E[X])^2$
 $Var[X] = q(0 - p)^2 + p(1 - p)^2 = q \cdot p^2 + p \cdot q^2 = pq(p + q) = pq$

V.c. (o prova) di Bernoulli: esempi

- X : lancio di una moneta onesta.
 - Se impongo che
 - $X=0$ se esce testa $\Rightarrow P(X=0) = 0.5$.
 - $X=1$ se esce croce $\Rightarrow P(X=1) = 0.5$.
 - X ha la stessa distribuzione di probabilità di una v.c. Bernoulliana con $p=0.5$,
 - In simboli $X \sim Ber(0.5)$
 - Si legge: X è distribuita come ...
- Y : Estrazione di un numero primo lanciando un dado a 6 facce
 - Se impongo che
 - $Y=0$ se non esce un primo $\Rightarrow P(Y=0) = 2/6$.
 - $Y=1$ se esce un primo $\Rightarrow P(Y=1) = 4/6$.
 - Ho che: $Y \sim Ber(2/3)$

V.c. Binomiale

- Somma di n variabili di Bernoulli i.i.d.

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i \quad X_i \sim \text{Ber}(p)$$

- $n+1$ modalità $y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 2, \dots, y_{n+1} = n$.

- Si dimostra che:

$$- P(Y = y_k) = p(y_k) = \binom{n}{y_k} p^{y_k} q^{n-y_k}$$

$$- \binom{a}{b} \text{ è detto coefficiente binomiale e vale } \binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$$

- Valore atteso: $E[Y] = \sum_{i=1}^n E[X_i] = \sum_{i=1}^n p = np$

- Varianza: $\text{Var}[Y] = \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i] = \sum_{i=1}^n pq = npq$

V.c. Binomiale: esempi - I

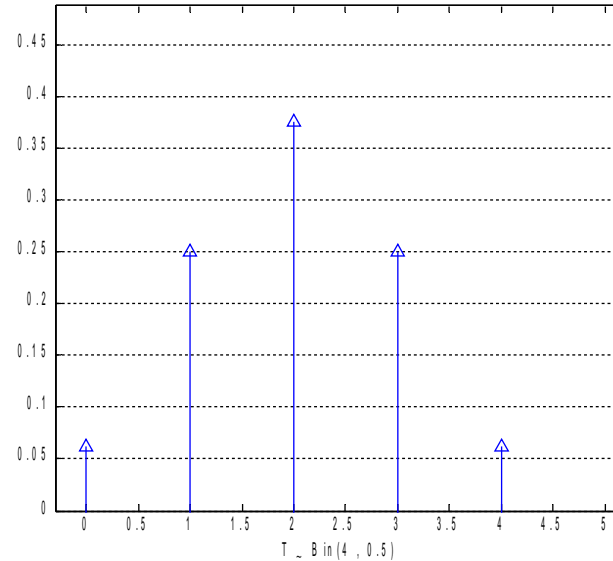
- B : # di 6 ottenuti lanciando di un dado onesto 10 volte.
 - Se creo 10 variabili X_1, X_2, \dots, X_{10} per cui impongo
 - $X_i = 0$ se l'esito del i -simo tiro sia diverso da 6
 - $X_i = 1$ se l'esito del i -simo tiro sia 6
 - ho che
 - le variabili create sono indipendenti
 - $X \sim Ber(1/6)$
 - $B = \sum_{i=1}^n X_i$
 - B : ha la stessa distribuzione di probabilità di una v.c. Binomiale con $p=1/6$ ed $n = 10$.
 - In simboli

$$B \sim Bin(10; 1/6)$$

V.c. Binomiale: esempi - II

- T : # di teste ottenute lanciando una moneta onesta 4 volte.

$$T \sim \text{Bin}(4; 0.5)$$

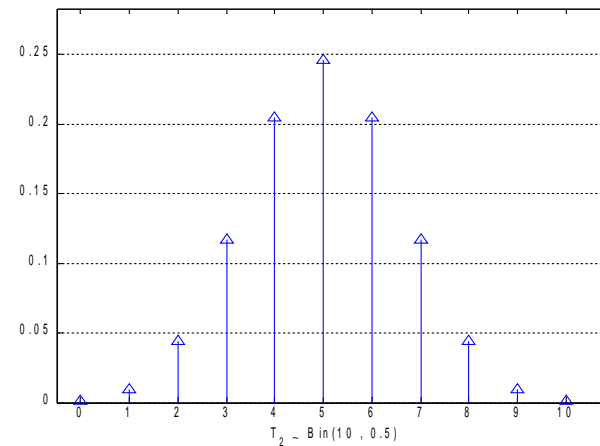


$$E[T] = 2$$

$$\text{Var}[T] = 1$$

- T_2 : # di teste ottenute lanciando una moneta onesta 10 volte.

$$T_2 \sim \text{Bin}(10; 0.5)$$



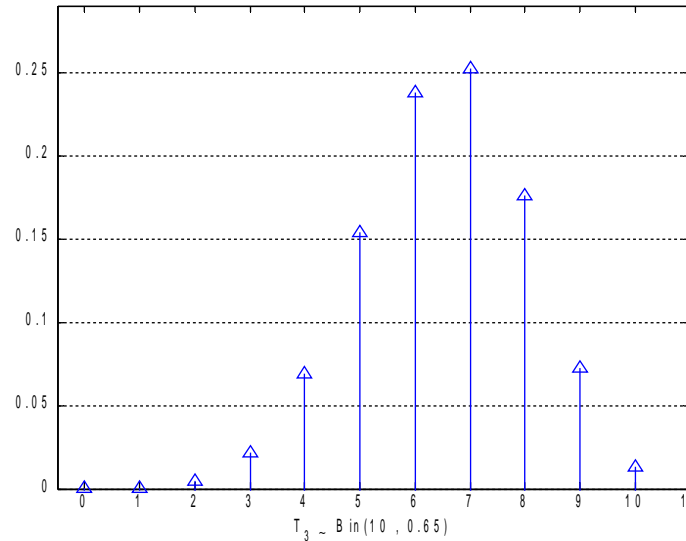
$$E[T] = 5$$

$$\text{Var}[T] = 2.5$$

V.c. Binomiale: esempi - III

- T_3 : # di teste ottenute lanciando una moneta disonesta 10 volte.

$$T_3 \sim \text{Bin}(10; 0.65)$$

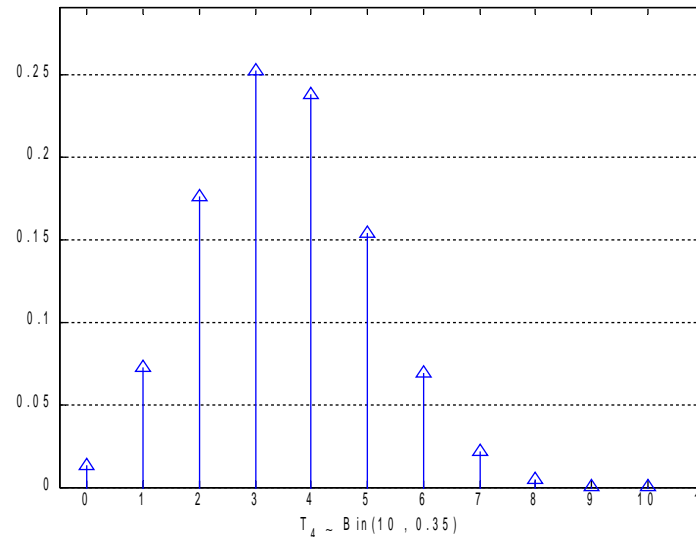


$$E[T_3] = 6.5$$

$$\text{Var}[T_3] = 2.275$$

- T_4 : # di teste ottenute lanciando una moneta disonesta 10 volte.

$$T_4 \sim \text{Bin}(10; 0.35)$$



$$E[T_4] = 3.5$$

$$\text{Var}[T_4] = 2.275$$

Ricapitolando - I

- Distribuzione di probabilità di una v.c. X : $p(x) = P(X = x)$
- Valore atteso: $E[X] = \sum_{i=1}^M p(x_i) x_i$
- Varianza: $Var[X] = \left(\sum_{i=1}^M p(x_i) (x_i^2) \right) - (E[X])^2$
- Variabili affini: $Y = aX + b$
 - $E[Y] = aE[X] + b$
 - $Var[Y] = a^2 Var[X]$
- Combinazione lineare di vv. cc. indipendenti $Y = \sum_{i=1}^K c_i X_i$
 - $E[Y] = \sum_{i=1}^K c_i E[X_i]$
 - $Var[Y] = \sum_{i=1}^K c_i^2 Var[X_i]$
- Teorema di Bienaymé - Čebičev

$$P(|X - E[X]| > \varepsilon) \leq \frac{Var[X]}{\varepsilon^2}$$

Ricapitolando - II

- Bernoulliana $X \sim Ber(p)$
 - $p(1) = p; p(0) = 1 - p = q$
 - $E[X] = p$
 - $Var[X] = pq$
- Binomiale $X \sim Bin(n; p)$
 - $p(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$
 - $E[X] = np$
 - $Var[X] = npq$