Università degli Studi di Verona
Laurea in Matematica Applicata
Correzione della prova di Elementi di Geometria — 03 febbraio 2015

matricola .... cognome .... nome ....

Scrivere subito matricola, nome e cognome e riconsegnare questo foglio al termine della prova.

Ex2	Ex1	Tot

Esercizio 1 (Punti 6)**.** Nel piano euclideo reale $\mathbb{E}^2$ in cui sia fissato un riferimento cartesiano ortogonale,

i. si determini l'affinità $f_{(\Sigma,\vec{b})}$ tale che

$$A=(2,3)\longmapsto A'=(-2,-3),\quad B=(2,0)\longmapsto B'=(-2,0),\qquad C=(0,0)\longmapsto C'=(0,0).$$

(Suggerimento: effettuare un disegno della situazione e sfruttare ...)

ii. L'affinità $f_{(\Sigma,\vec{b})}$ conserva le aree? (Giustificare la risposta).

iii. Si determini il simmetrico B'' di B' rispetto alla retta passante per A e A'.

iv. Si determini l'area del quadrilatero (convesso) $CB''A'B'$.

Sol.

i. In base al disegno (vedi figura **??**) è immediato osservare che la trasformazione $f_{\Sigma,\vec{b}}$ è una simmetria centrale di centro l'origine o la composizione di due ribaltamenti, uno rispetto all'asse x e uno rispetto all'asse y o viceversa. Si osservi che l'origine viene mandata nell'origine e quindi la componente di traslazione è nulla. Allora la matrice rappresentativa dell'affinità è:

$$\mathcal{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

ii. Poiché la matrice $\mathcal{C}$ e in particolare la matrice $\Sigma=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ ha determinante unitario, la trasformazione $f_{\Sigma,\vec{b}}$ conserva le aree.

iii. Per determinare il punto B'' è sufficiente determinare la retta s per B' e ortogonale alla retta r per AA'. A questo punto l'intersezione tra le due rette è il punto medio del segmento $B'B''$. Ora

$$r=(2\,\lambda,3\,\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{R},\qquad s=(-2+3\,\mu,-2\,\mu),\quad \lambda\in\mathbb{R}\,,$$

da cui $M=r\cap s$ si ottiene per $\mu=\frac{6}{13}$. Essendo M punto medio di $B'B''$, il punto B'' si ottiene per il valore doppio del parametro μ che fornisce M: da cui $B''=\left(\frac{10}{13},-\frac{24}{13}\right)$, ottenuto per $\mu=\frac{12}{13}$.

iv. L'area del quadrilatero $CB''A'B'$ è due volte l'area del triangolo (rettangolo) ABC e quindi

$$\mathrm{Area}_{CB''A'B'}=2\,\mathrm{Area}_{ABC}=2\,|\,\det\begin{bmatrix}2 & -2\\ 3 & 0\end{bmatrix}\,|=6.$$

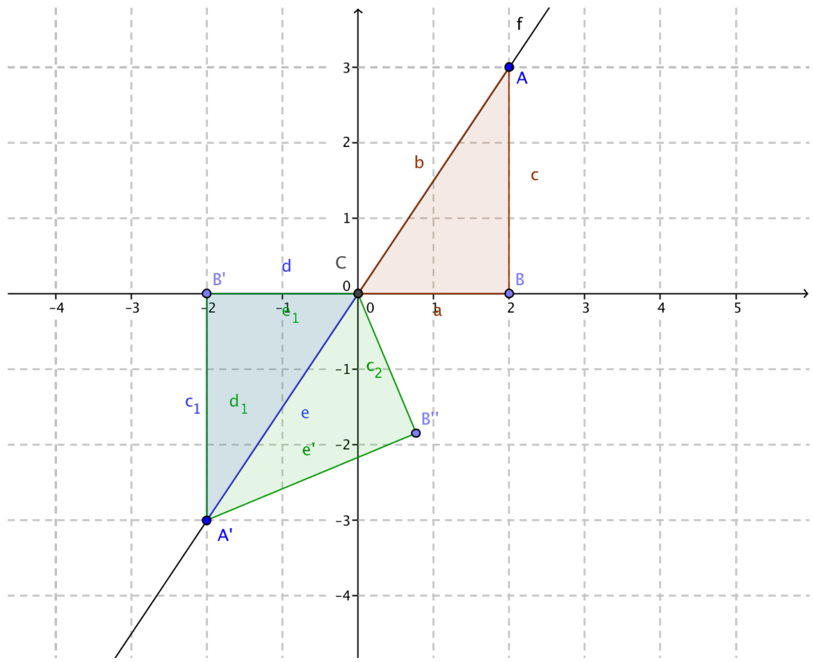

Figura 1.

Esercizio 2 (Punti 9)**.** Nel piano euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, ampliato proiettivamente e complessificato,

i. si determini la conica $\mathcal{C}$ avente come asintoto la retta $a_1 : \ x_2 = 1$, centro $C = [1, 0, 1]$, tale che la tangente in $A = [0, 1, 1]$ passi per C, e passante per il punto $P = [1, 2, 2]$.

ii. Si determinino gli assi, gli asintoti, nonché la forma canonica metrica di $\mathcal{C}$.

iii. Si abbozzi un grafico di $\mathcal{C}$.

Sol.

i. Ovviamente la retta per C e tangente la conica in A è un asintoto, essendo A punto improprio e C centro e la conica in questione è necessariamente un iperbole. Costruiamo il fascio $\mathcal{F}_\kappa$ di coniche bitangenti ai due asintoti e di conica improprio contata due volte la retta impropria (passante per i due punti, impropri, di tangenza tra le coniche e gli asintoti). L'asintoto a_2 tangente la conica in A ha equazioni parametriche $(\alpha, 1 + \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e quindi equazione cartesiana (in coordinate omogenee) $x_0 + x_1 - x_2 = 0$. Il fascio $\mathcal{F}_\kappa$ è

$$\mathcal{F}_\kappa = (x_2 - x_0)(x_0 + x_2 - x_2) + \kappa x_0^2 = 0 \,.$$

Imponiamo ora il passaggio per P, ottenendo $\kappa = -1$ e quindi

$$\mathcal{C} : \ -2x_0^2 - x_1 x_0 + 2x_2 x_0 + x_1 x_2 - x_2^2 = 0 \,.$$

ii. La matrice della conica è (a meno di un fattore moltiplicativo non nullo)

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

e quindi $\det A = -2$, $\det A_{00} = -1$, $\mathrm{Tr} A_{00} = 2$. Usando il metodo degli invariati si ricavano i semiassi

$$a = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)}}\,, \quad b = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{2}\right)}}\,,$$

e quindi la forma canonica metrica. Gli asintoti sono le rette a_1 e a_2, mentre per determinare gli assi o si determinano le direzione dei diametri coniugati ortogonali (usando l'opportuna equazione) e si determinano gli autovettori della matrice A_{00}. Questi sono

$$v_1 = [1-\sqrt{2} \quad 1]^T, \qquad v_2 = [1+\sqrt{2} \quad 1]^T\,.$$

Da cui gli assi (passanti per il centro della conica)

$$\alpha_1 = \Big((1-\sqrt{2})\mu, 1+\mu\Big) \ \mu \in \mathbb{R}\,, \quad \alpha_2 = \Big((1+\sqrt{2})\lambda, 1+\lambda\Big) \ \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

iii.

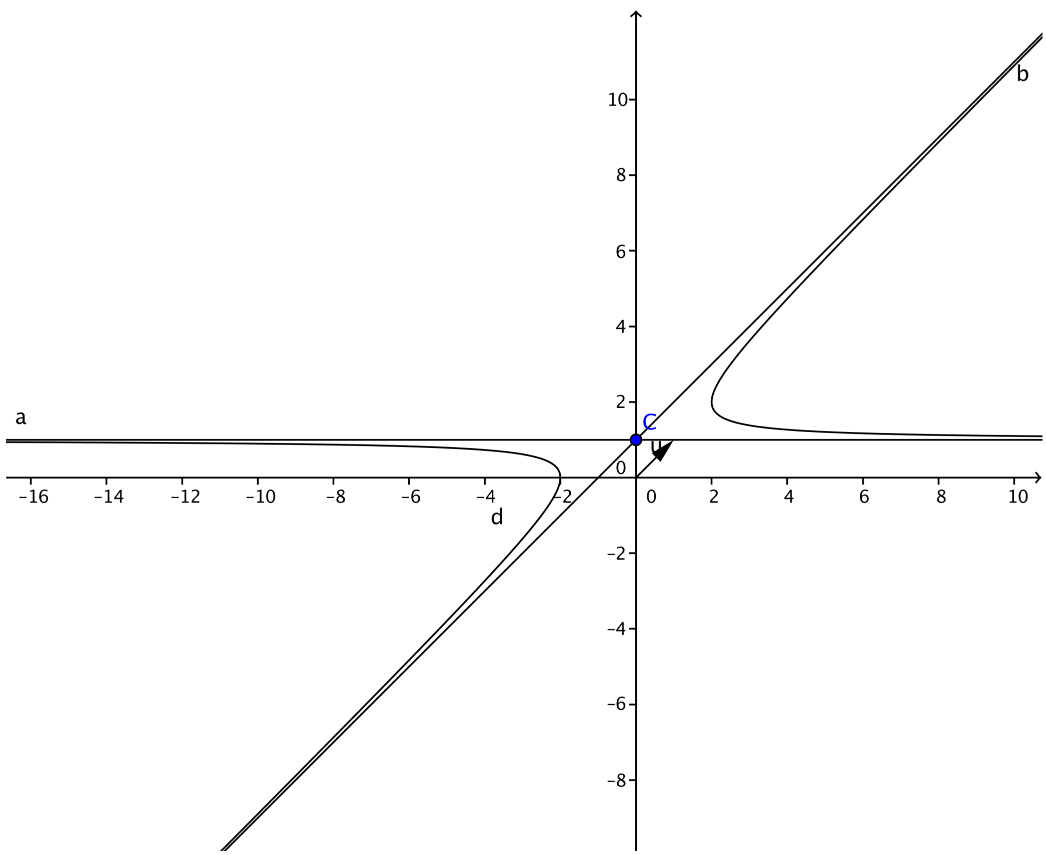

Figura 2.