ESEMPI ED ESERCIZI DI ALGEBRA LINEARE

Nicola Sansonetto*

21 dicembre 2009

1 Numeri complessi e induzione

Esempio 1. Determinare i numeri complessi tali che

$$z^2 - 3z + 3 + i = 0$$

Sol. Gli zeri del polinomi a primo membro sono

$$z_1 = \frac{3 + \sqrt{-3-4i}}{2}, \qquad z_2 = \frac{3 - \sqrt{-3-4i}}{2}$$

Scriviamo meglio i due zeri. Il discriminante del polinomio $\sqrt{-3-4i}$ individua un qualsiasi numero complesso $w = x + iy$ il cui quadrato sia proprio $-3-4i$. Per cui deve essere $w^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = -3 - 4i$ cioè deve essere soddisfatto il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = -4 \end{cases}$$

Ponendo $xy \neq 0$[1] il sistema precedente è equivalente a

$$\begin{cases} x^4 + 3x^2 - 4 = 0 \\ y = -\dfrac{2}{x} \end{cases}$$

Poniamo $t = x^2$ nella prima equazione, ottenendo $t^2 + 3t - 4 = (t-1)(t+4) = 0$. Per cui $x^2 = 1$ oppure $x^2 = -4$. Quest'ultima possibilità non è accettabile. Quindi si ottengono due espressioni per w, $w_1 = -1 + 2i$ oppure $w_2 = 1 - 2i$ (si osservi che necessariamente $w_1 = -w_2$). Perciò $z^2 - 3z + 3 + i = (z - 1 - i)(z - 2 + i) = 0$.

Esercizio 1. Determinare i numeri complessi tali che

1. $z^2 + (i+1)z + 3 + i = 0$.
2. $z^3 - (i+1)z^2 + (1+4i)z - 1 - 3i = 0$.
3. Sapendo che $1 + i$ è zero di $z^4 - 3z^3 + 5z^2 - 4z + 2 = 0$ determinare gli altri.
4. $x^3 + 1 = 0$.
5. $x^2 - x - 2 = 0$.
6. $x^4 + 1 = 0$.
7. $x^3 - 4x^2 + 4x - 1$.

Esempio 2. Determinare parte reale, parte immaginaria e forma trigonometrica di

$$w = \frac{1+i}{3-i}$$

*Sono a grato a quanti mi indicheranno i molti errori presenti in questi fogli, al fine di fornire uno strumento migliore a quanti lo riterranno utile, e-mail: nicola.sansonetto@gmail.com

[1] Si ossevi che se x o y sono nulli allora il sistema non ammette soluzione.

Sol. Moltiplichiamo numeratore e denominatore per il coniugato del denominatore, $3+i$:

$$\frac{1+i}{3-i}\frac{3+i}{3+i}=\frac{1+2i}{5}$$

Quindi $\mathfrak{Re}\,w=\frac{1}{5}$ e $\mathfrak{Im}\,w=\frac{2}{5}$. Per determinare la forma trigonometrica di w, calcoliamone prima il modulo: $|w|=\sqrt{w\bar{w}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$. La forma trigonometrica di w è

$$w=|w|\left(\frac{\mathfrak{Re}\,w}{|w|}+i\frac{\mathfrak{Im}\,w}{|w|}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}+i\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

in cui $\frac{1}{\sqrt{5}}=\cos\alpha$ e $\frac{2}{\sqrt{5}}=\sin\alpha$.

Esercizio 2. Determinare parte reale, parte immaginaria e forma trigonometrica di

1. $w=(1+i)(\sqrt{3}+i)$ (in due modi differenti).
2. $v=\frac{3+3i}{2-i}$.
3. $z=(i)^{12}\frac{(1-i)^4}{(1+i)^5}$.
4. $z=\sqrt[3]{i}$.

Esempio 3. Determinare per quali numeri complessi

$$z^6=1$$

Sol. Sappiamo che se z è un numero complesso non nullo, $z=|z|\operatorname{cis}\alpha$,[2] e m è un intero, allora vale la formula di de Moivre

$$z^m=|z|^m\left(\cos(m\alpha)+i\sin(m\alpha)\right)$$

Definzione 1. Dati $m\in\mathbb{Z}$ e $z\in\mathbb{C}$ si dice radice m-esima di z ogni numero complesso w tale che $w^m=z$.

Ora dimostriamo il seguente importante risultato

Proposizione 2. Ogni numero complesso non nullo z ha esattamente m-radici m-esime distinte che sul piano di Argand-Gauss si dispongono sui vertici di un poligono regolare a m lati inscritto nella circonferenze di centro l'origine e raggio $\sqrt[m]{|z|}$.

Dimostrazione. Limitiamoci a ripercorrere la dimostrazione della prima parte. Dobbiamo determinare i numeri complessi w tali che $w^m=z$. Siano $z=|z|\operatorname{cis}\alpha$ e $w=|w|\operatorname{cis}\beta$ le forme trigonometriche di z e w, rispettivamente, allora $w^m=z$ se e solo se

$$\begin{cases}|z|=|w|^m\\ m\beta=\alpha+2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

nelle incognite $|w|$ e β. Per cui $|w|=\sqrt[m]{|z|}$ e $\beta_k=\frac{\alpha+2k\pi}{m}$. □

Ora applichiamo il precedente risultato al nostro problema. Nel nostro caso $|z|=1$ e quindi $|w|=1$. Invece $\beta_k=\frac{\alpha+2k\pi}{6}$ e $\alpha=0$, quindi $\beta_k=\frac{k\pi}{3}$, $k=0,1,2,3,4,5$ cioè (a meno di multipli interi di 2π) $w_k=\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3}$, $k=0,1,2,3,4,5$.

Esercizio 3. Determinare le radici settime dell'unità. Dimostrare che la somma delle radici m-esime dell'unità è zero.

[2] Denotiamo, per brevità, con $\operatorname{cis}\alpha$ il termine $\cos\alpha+i\sin\alpha$.

2 Matrici

Esercizio 4. Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2+3i & 1+i \\ 0 & i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 3+5i \\ 6 \\ 2-2i \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 7+1 & 2+3i \\ 3-2i & 0 \end{bmatrix}$$

verificare che ha senso la seguente espressione

$$(A^H\bar{C} + iB^T)\bar{B} + (1+3i)D^H$$

In caso affermativo determinarla.

Esempio 4. Dimostrare che ogni matrice quadrata complessa A si scrive in un unico modo nella forma

$$A = B + C$$

in cui B è hermitiana e C è anti-hermitiana.

Sol. In primo luogo dimostraimo che A si può scrivere come somma di una parte B che chiameremo hermitiana e di una parte C che chiameremo anti-hermitiana. Poniamo $B = \frac{A+A^H}{2}$ e $C = \frac{A-A^H}{2}$ e osserviamo che $B = B^H$ e $C = -C^H$. A questo punto è semplice osservare che $B + C = \frac{A+A^H}{2} + \frac{A-A^H}{2} = A$.

Dimostriamo ora l'unicità della scrittura. Supponiamo che esistano altre due matrici $B' \neq B$ hermitiana e $C' \neq C$ anti-hermitiana tali che $A = B' + C'$. Allora

$$B + C = B' + C'$$

cioè

$$B - B' = C' - C$$

ma $B - B'$ è hermitiana mentre $C' - C$ è anti-hermitiana, ma l'unica matrice sia hermitiana che anti-hermitiana è la matrice nulla e quindi $B = B'$ e $C = C'$.

Esercizio 5. Scrivere la matrice

$$\begin{bmatrix} 1-2i & 2i \\ -2 & 1-i \end{bmatrix}$$

come somma della sua parte hermitiana e anti-hermitiana.

Esempio 5. Dimostrare che il prodotto di due matrici triangolari superiori di ordine n è una matrice triangolare superiore di ordine n.

Sol. Effettuiamo la dimostrazione per induzione sull'ordine della matrice.

Passo Base, per $n = 2$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} + b_{22}a_{12} \\ 0 & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

Passo induttivo, assumiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ il prodotto di due matrici triangolari superiori di ordine n sia una matrice triangolare superiore di ordine n e mostriamo che allora il prodotto di due matrici triangolari superiori di ordine $n+1$ è una matrice triangolare superiore di ordine $n+1$. La generica matrice triangolare superiore di ordine $n+1$ è del tipo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & & a_{1n+1} \\ 0 & a_{22} & \dots & & a_{2n+1} \\ 0 & 0 & a_{33} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & & 0 & a_{n+1n+1} \end{bmatrix}$$

È conveniente scrivere la matrice A a blocchi:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & u^T \\ 0 & A' \end{bmatrix}$$

in cui $u^T = (a_{12} \quad a_{13} \quad a_{1n+1})$, 0 è il vettore nullo di ordine n e A' è la matrice triangolare superiore di ordine n che si ottiene da A cancellando la prima riga e la prima colonna. A questo punto

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & u^T \\ 0 & A' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & v^T \\ 0 & B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}v^T + u^T B' \\ 0 & A'B' \end{bmatrix}$$

Il prodotto di A per B è una matrice triangolare superiore di ordine $n+1$, infatti, per ipotesi induttiva $A'B'$ è una matrice triangolare superiore di ordine n.

Esercizio 6. Determinare tutte le matrici reali e simmetriche 2×2, A, tali che $A^2 = \mathrm{id}_2$.

Esercizio 7. Dimostrare che non esistono matrici complesse A tali che

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 8. Esistono matrici reali e anti-simmetriche 2×2, A tali che $A^2 = \mathrm{id}_2$? Perché?

Esercizio 9. Trovare tutte le matrici 2×2 che commutano con le matrici tringolari superiori.

Esercizio 10. Dimostrare che se $U \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ è unitaria e hermitiana, allora $P := \frac{1}{2}(\mathrm{id}_{n\times n} - U)$ è tale che $P = P^H$ e $P^2 = P$. Viceversa, se $P \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ è una matrice tale che $P = P^H$ e $P^2 = P$, allora $U = \mathrm{id}_{n\times n} - 2P$ è unitaria e hermitiana. (Ricordiamo che una matrice $U \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ si dice unitaria se $UU^H = \mathrm{id}_{n\times n} = U^H U$.)

3 Sistemi lineari

Esempio 6. Determinare le soluzioni del sistema lineare $Ax = B$, in cui

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & -2 \\ 3 & 6 & 0 & -6 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Sol. Consideriamo la matrice aumentata

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & -2 & 6 \\ 3 & 6 & 0 & -6 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

e applichiamo ad essa l'eliminazione di Gauss. In primo luogo moltiplichiamo la prima riga per $\frac{1}{2}$ (moltiplichiamo, cioè, la matrice C per la matrice elementare $E_{11}(2^{-1})$, ottendo così una matrice ad essa equivalente):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & 0 & -6 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Quindi alla precedente matrice effettuiamo le seguenti operazioni elementari: (1) sostituiamo la seconda riga con la seconda riga meno tre volte la prima, (2) sostituiamo alla terza riga la terza meno la prima e (3) sostituiamo la quarta riga con la quarta meno la prima, ottenendo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ora moltiplichiamo la seconda riga per $-\frac{1}{3}$ ottenendo la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Infine sostituiamo alla terza riga la terza meno la seconda ottenendo una forma ridotta della matrice C:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice U possiede due colonne dominanti e tre colonne libere, inoltre la colonna dei termini noti è libera, quindi il sistema ammette infinite soluzioni dipendenti da due paramentri.

Esercizio 11. Determinare le soluzioni del sistema di matrice aumentata

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & i & -i \\ 1 & -1 & 1-i & i & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 1-i & 0 & 1 \\ i & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esempio 7. Determinare la forma ridotta, le colonne dominanti, le colonne libere e il rango, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$ della matrice

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} i & 0 & -i & i\alpha \\ 1 & \alpha^2+4 & 0 & \alpha \\ 1 & \alpha^2+4 & 0 & 2\alpha \end{bmatrix}$$

Sol. Effettuiamo operazioni elementari sulla matrice A_α, mettendole in evidenza mediante le moltiplicazioni per matrici elemntari.

$$A'_\alpha = E_{11}(-i)A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 1 & \alpha^2+4 & 0 & \alpha \\ 1 & \alpha^2+4 & 0 & 2\alpha \end{bmatrix}$$

$$A''_\alpha = E_{21}(-1)E_{31}(-1)A'_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & \alpha^2+4 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha^2+4 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

Sia ora $\alpha^2 + 4 \neq 0$, allora

$$A'''_\alpha = E_{22}((\alpha^2+4)^{-1})A''_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 1 & (\alpha^2+4)^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha^2+4 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

$$A''''_\alpha = E_{32}(-(\alpha^2+4))A'''_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 1 & (\alpha^2+4)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

Se inoltre $\alpha \neq 0$ dividiamo l'ultima riga per α, otteniamo una forma ridotta di A_α per $\alpha \neq 0,\ 2i,\ -2i$

$$U_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 1 & (\alpha^2+4)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se $\alpha = 2i,\ -2i$, allora

$$U_{\pm 2i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \pm 2i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mp 2i \end{bmatrix}$$

Se, infine, $\alpha = 0$

$$U_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Riassumendo e pensando alla matrice A_α come alla matrice aumentata di un sistema lineare:

- se $\alpha \neq 0,\ \pm 2i$, allora la prima, seconda e quarta colonna sono dominanti, mentre la terza è libera. Il rango di A_α è 3. Il sistema associato, essendo la matrice dei termini noti dominante, non ammette soluzioni;

- se $\alpha = \pm 2i$, allora la prima, la terza e la quarta colonna sono dominanti, mentre la seconda è libera. Il rango di $A_{\pm 2i}$ è 3. Il sistema associato, essendo la colonna dei termini noti dominante, non ammette soluzioni;
- se $\alpha = 0$, allora la prima e la seonda colonna sono dominanti, mentre la terza e la quarta sono libere. La matrice A_0 ha rango 2. Il sistema associato, essendo la colonna dei temini noti libera, ammete infinite soluzioni dipendenti da un paramentro.

Esercizio 12. Determinare le soluzioni del sistema $Ax = B$, in cui

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ \alpha+1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Esercizio 13. Determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$ le soluzioni del sistema lineare di matrice aumentata

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 2\alpha & \alpha & \alpha & 6\alpha \\ 1 & 4 & 5 & 7 & 12 \\ 2 & 3 & \alpha+1 & -1 & 7+2\alpha \\ 1+\alpha & 5+2\alpha & 7+\alpha & 10+\alpha & 15+6\alpha \end{bmatrix}$$

Esercizio 14. Determinare, alvariare di $\alpha \in \mathbb{C}$ le soluzioni del sistema lineare nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} x_2 - \alpha x_1 + (\alpha-2)(x_3+1) = 0 \\ (\alpha-1)x_1 + \alpha x_3 = 2 \\ x_1 + \alpha x_2 + 2\alpha^2 x_3 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 15. Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$ le soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + \alpha x_3 + 2x_4 = \alpha \\ x_1 + 6x_2 + \alpha x_3 + 3x_4 = 2\alpha+1 \\ -x_1 - 3x_2 + (\alpha-2)x_4 = 1-\alpha \\ \alpha x_3 + (2-\alpha)x_4 = 1 \end{cases}$$

Esempio 8. Determinare le inverse destre della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e le inverse sinistre della matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Sol. Determianiamo le inverse destre della matrice A, lasciando per exercise il calcolo delle inverse sinistre della matrice B.

La generica candidata inversa destra di A è una matrice R del tipo

$$R = \begin{bmatrix} a & e & i \\ d & f & l \\ c & g & m \\ d & h & n \end{bmatrix}$$

e tale che $AR = \mathrm{id}3 \times 3$. Ora

$$AR = \begin{bmatrix} a-c+3d & b+d & -2a+3b-c \\ e-g+3h & f+h & -2e+3f-g \\ i-m+3n & l+n & -2i+3l-m \end{bmatrix}$$

Ora AR è uguale all'identità se e solo se sono soddisfatti i seguenti sistemi di tre equazioni in quattro incognite

$$\begin{cases} a-c+3d = 1 \\ b+d = 0 \\ -2a+3b-c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} e-g+3h = 0 \\ f+h = 1 \\ -2e+3f-g = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} i-m+3n = 0 \\ l+n = 0 \\ -2i+3l-m = 1 \end{cases}$$

È semplice osservare che i tre sistemi ammettono infinite soluzioni dipendenti da un parametro

$$\begin{cases} a = \frac{1}{3} - 2d \\ b = -d \\ c = -\frac{2}{3} + d \end{cases} \qquad \begin{cases} e = 1 - 2h \\ f = 1 - h \\ g = 1 + h \end{cases} \qquad \begin{cases} i = -\frac{1}{3} - 2n \\ l = -n \\ m = -\frac{1}{3} + n \end{cases}$$

Quindi le inverse destre della matrice A sono le matrici della forma

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} - 2d & 1 - 2h & -\frac{1}{3} - 2n \\ -d & 1 - h & -n \\ -\frac{2}{3} + d & 1 + h & -\frac{1}{3} + n \\ d & h & n \end{bmatrix}$$

con $d, h, n \in \mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$.

Esempio 9. Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ la matrice

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -2\alpha & -3 \\ 0 & \alpha & -1 \\ 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

è invertibile. Per tali α determinare l'inversa A_α^{-1}

Sol. In primo luogo determiniamo il rango di A_α al variare di α in $\mathbb{C}$, determinando una forma a scala di A_α.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2\alpha & -3 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha + 5 \end{bmatrix}$$

È semplice osservare che se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq -5$ allora la matrice A_α ha rango massimo (pari a tre) e quindi è invertibile. Consideriamo la matrice pluriaumentata $(A_\alpha|\text{id}3 \times 3)$ e tramite operazioni elementari cerchiamo di arrivare (e lo possiamo fare perché in questi casi A_α è invertibile) ad una matrice pluriaumentata del tipo $(\text{id}3 \times 3|B_\alpha)$ e B_α sarà l'inversa di A_α.

$$(A_\alpha|\text{id}3 \times 3) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2\alpha & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Sostituiamo la terza riga con la terza meno la prima ottenendo la matrice

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2\alpha & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2\alpha & \alpha + 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Quindi sostituiamo la terza riga con la terza meno due volte la seconda

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2\alpha & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + 5 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Ora sostituiamo la seconda riga con $(\alpha + 5)$ volte la seconda più la terza e la prima riga con $(\alpha + 5)$ volte la prima meno tre volte la terza

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \alpha + 5 & -2\alpha & 0 & \alpha + 2 & -6 & +3 \\ 0 & \alpha(\alpha + 5) & 0 & -1 & \alpha + 3 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha + 5 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Infine sostituiamo la prima riga con la prima più due volte la seconda

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \alpha + 5 & 0 & 0 & \alpha & 2\alpha & 5 \\ 0 & \alpha(\alpha + 5) & 0 & -1 & \alpha + 3 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha + 5 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Infine dividiamo la prima e la terza per $(\alpha + 5)$, e la seconda per $\alpha(\alpha + 5)$. Quindi l'inversa di A_α, per $\alpha \neq 0, \ -5$ è

$$A_\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha + 5} \begin{bmatrix} \alpha & 2\alpha & 5 \\ -\frac{1}{\alpha} & \frac{\alpha+3}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

4 Decomposizione LU e $P^{-1}LU$

Esercizio 16. Determinare la decomposizione LU della matrice reale simmetrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Esercizio 17. Determinare la decomposizione LU della matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Esercizio 18. Determinare la decomposizione LU o $P^{-1}LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & -2 & 6 \\ 3 & 6 & 0 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Infine determinare le colonne dominanti edil rango della matrice A.

Esercizio 19. Determinare la decomposizione LU o $P^{-1}LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & i & -i \\ 1 & 0 & 1-i & i & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -i \\ 0 & i & 1-i & 2 & 1 \\ i & 0 & -i & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Infine determinare le colonne dominanti edil rango della matrice A.

Esercizio 20. Si consideri la matrice

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Determinare, quando possibile, la decomposizione LU di M o la decomposizione $P^{-1}LU$.

Esempio 10. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Determinare una decomposizione LU per

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 2\alpha & 0 & \alpha & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \alpha \\ 1 & 2 & 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

per i valori di α per cui non è possibile, determinare una $P^{-1}LU$.

Sol. Sia $\alpha \neq 0$.

Passo 1. Dividiamo la prima riga per α, $I \to I/\alpha$:

$$\mathbf{A'}_\alpha = E_{11}(\alpha^{-1})\,\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \alpha \\ 1 & 2 & 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

Passo 2. Sostituiamo la seconda riga con la seconda più la prima, $II \to II + I$ e la quarta con la quarta meno la prima, $IV \to IV - I$:

$$\mathbf{A''}_\alpha = E_{41}(-1)E_{21}(1)\,\mathbf{A'}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

Passo 3. Dividiamo la quarta riga per α, $IV \to IV/\alpha$:

$$\mathbf{U}_\alpha = E_{44}(\alpha^{-1})\,\mathbf{A}''_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Abbiamo cosí che

$$\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{L}_\alpha\,\mathbf{U}_\alpha$$

in cui

$$\mathbf{L_a} = E_{11}(\alpha)E_{21}(-1)E_{41}(1)E_{44}(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

Consideriamo ora il caso $\alpha = 0$.

Passo 0. Scambiamo la prima con la quarta riga, $I \leftrightarrow IV$:

$$\mathbf{B}_0 = E_{14}\,\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Passo 1. Sostituiamo la seconda riga con la seconda più la prima, $II \to II + I$:

$$\mathbf{U}_0 = E_{21}(1)\,\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da cui $\mathbf{A}_0 = P^{-1}\,\mathbf{L}_0\,\mathbf{U}_0 =$ in cui $\mathbf{L}_0 = E_{21}(1)$ e $P^{-1} = E_{14}^T$.

Esercizio 21. Sia α un parametro complesso e si consideri la matrice

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & \alpha-2 & 2-\alpha & 1 & 0 \\ 2-\alpha & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & \alpha-2 & 0 & 1 & 0 \\ 2-\alpha & 1 & 0 & 2-\alpha & -1 \end{bmatrix}$$

Se ne trovi una decomposizione LU e, per i valori di α per cui ci non possibile, una decomposizione P^TLU. Per $\alpha = 0$ e $\alpha = 2$, determinare una base dello spazio nullo e una base dello spazio delle colonne di $\mathbf{A}_\alpha$. Inoltre, pensando la matrice A_α, come alla matrice completa di un sistema lineare, determinare le soluzioni di tale sistema al variare di α.

Esercizio 22. Sia α un parametro complesso e si consideri la matrice

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha-1 & 2\alpha-2 & 0 & \alpha^2-\alpha & \alpha^2-\alpha \\ 1 & 2 & -1 & -\alpha & \alpha \\ \alpha & 2\alpha & 2 & \alpha^2+4\alpha & \alpha^2+3 \\ \alpha^2 & 2\alpha^2 & 1 & \alpha^3+2\alpha & \alpha^3 \end{bmatrix}$$

Se ne trovi una decomposizione LU e, per i valori di α per cui ci non possibile, una decomposizione P^TLU. Per $\alpha = 0$ e $\alpha = 2$, determinare una base dello spazio nullo e una base dello spazio delle colonne di $\mathbf{A}_\alpha$. Inoltre, pensando la matrice A_α, come alla matrice completa di un sistema lineare, determinare le soluzioni di tale sistema al variare di α.

Esercizio 23. Determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU o $P^{-1}LU$ della matrice

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} i & 0 & -i & i\alpha \\ 1 & \alpha^2+4 & 0 & \alpha \\ 1 & \alpha^2+4 & 0 & 2\alpha \end{bmatrix}$$

Infine determinare le colonne dominanti ed il rango di A_α.

Esempio 11. Sia α un parametro reale e si consideri la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 2 & 4-\alpha & \alpha^2-2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & \alpha+1 & -\alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\alpha \end{bmatrix}$$

Se ne trovi una decomposizione LU e, per i valori di α per cui ci non possibile, una decomposizione $P^T LU$. Per $\alpha = 0$ e $\alpha = 2$, determinare una base dello spazio nullo e una base dello spazio delle colonne di $\mathbf{A}_\alpha$.

Esercizio 24. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Determinare una decomposizione LU per

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ -1 & 1-2\alpha & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -\alpha & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

per i valori di α per cui non è possibile, determinare una $P^{-1}LU$.

5 Spazi vettoriali, generatori e basi

Esempio 12. Sia $V = \mathcal{P}_5(\mathbb{R})$ lo spazio dei polinomi di grado strettamente minore di 5. Si considerino i seguenti sottoinsiemi di V

$$V_s = \{f \in V |\, f(x) = f(-x)\}$$
$$V_a = \{f \in V |\, -f(x) = f(-x)\}$$

(i) Dimostrare che $V_s \le V$ e $V_a \le V$.

(ii) Determinare un insieme di generatori per V_s e V_a.

Sol. *(i)* In primo luogo osserviamo che $V_s \neq \{\}$, infatti il polinomio nullo sta in V_s. Siano $f, g \in V_s$ e siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Per mostrare che $V_s \le V$ facciamo vedere che $\alpha f + \beta g \in V_s$ per ogni $f, g \in V_s$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dal momento che $f, g \in V$ sia ha che $(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$. Analogamente $(\alpha f + \beta g)(-x) = \alpha f(-x) + \beta g(-x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = (\alpha f + \beta g)(x)$ in cui la penultima uguaglianza vale poiché $f, g \in V_s$.

(ii) Il generico vettore di V è del tipo $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Ora $f(-x) = a_4x^4 - a_3x^3 + a_2x^2 - a_1x + a_0$. Ricordando che due polinomi sono uguali quando hanno i coefficienti uguali, si ricava che $f(x) = f(-x)$ se e solo se $a_3 = 0 = a_1$. A questo punto, ricordando che $V =< 1, x, x^2, x^3, x^4 >$ si ricava facilmente che un insieme di generatori di V_s è ad example $\{1, x^2, x^4\}$.

La parte per V_a è analoga ed è lasciata per exercise.

Esempio 13. Sia V lo spazio vettoriale reale delle funzioni reali di variabile reale $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Sia $W = \{f \in V |\, f(1) = 0 \text{ opp. } f(4) = 0\}$. Si dica se $W \le V$.

Sol. In primo luogo osserviamo che $W \neq \{\}$.Infatti la funzione nulla sta in W. Siano ora $f, g \in W$, ad example $f(x) = x - 1$ e $g(x) = x - 4$. È immediato osservare che $(f + g)(x) = f(x) + g(x) \neq W$, infatti $f(x) + g(x) = x - 1 + x - 4 = 2x - 5 \neq W$. Quindi $W \nleq V$.

Esempio 14. Si consideri l'insieme $\mathbb{R}^*_+$ dei reali strettamente positivi dotato delle seguenti operazioni: la "*somma*" dei due numeri sia l'usuale prodotto, cioè se $r, s \in \mathbb{R}^*_+$ la *somma* tra i due è data dal prodotto rs; il *prodotto per scalari* sia l'usuale esponenziazione, cioè se $r \in \mathbb{R}^*_+$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ il prodotto per scalari è $\alpha(r) = r^\alpha$. Dimostrare che $\mathbb{R}^*_+$ dotato di queste operazioni è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. Determinare l'elemento neutro e l'opposto di ogni elemento. Tale spazio vettoriale ha dimensione finita?

Sol. È semplice osservare che vale la proprietà associativa (A1), dal momento che essa vale per l'usuale prodotto. Dalle regole del prodotto usuale si ricava che l'elemento neutro è l'1 (A2) e che l'opposto di ogni numero $r \in \mathbb{R}^*_+$ è dato dal reciproco (A3). Verifichiamo i rimanenti assiomi uno per uno.
(M1) Siano $r \in \mathbb{R}^*_+$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $\alpha(\beta r) = \alpha(r^\beta) = (r^\beta)^\alpha = r^{\alpha\beta} = (\alpha\beta)r$.
(M2) Siano $r \in \mathbb{R}^*_+$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $(\alpha + \beta)r = r^{\alpha+\beta} = r\alpha\, r^\beta = \alpha r + \beta r$, in cui la "+" nel primo membro è l'usuale

somma sui reali.
(M3) Siano $r, s \in \mathbb{R}^*_+$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. $\alpha(r+s) = \alpha(rs) = (rs)^\alpha = r^\alpha s^\alpha = \alpha r + \alpha s$, in cui la "+" a primo membro è la "*somma*" definita su $\mathbb{R}^*_+$.
(M4) Sia $r \in \mathbb{R}^*_+$. $1r = r^1 = r$.

Esercizio 25. Dimostrare che l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, x^2+y^2 = 1\}$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 26. $\mathbb{C}$ può essere pensato sia come a $\mathbb{R}$ che come $\mathbb{C}$-spazio vettoriale. Qual' è la dimensione di $\mathbb{C}$ come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale? E come $\mathbb{C}$-spazio vettoriale? Determinare due diverse basi in entrambi i casi.

Esercizio 27. Dimostrare che gli spazi delle funzioni continue sui reali $C^0(\mathbb{R})$ e lo spazio delle funzioni continue con derivata continua sui reali $C^1(\mathbb{R})$ sono $\mathbb{R}$-spazi vettoriali. Che dimensione hanno? Dimostrare che lo spazio delle funzioni complesse è un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale.

Esempio 15. Verificare che il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ formato dai vettori $\mathbf{x} = (x,y,z)^T$ tale che

$$\Sigma = \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. Determinare un insieme di generatori, una base e la dimensione di Σ.

Sol. In primo luogo osserviamo che $\mathbf{0} = (0,0,0) \in \Sigma$. Siano, ora, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma$, e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, mostriamo allora che $(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) \in \Sigma$. Infatti

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta y_1 - (\alpha x_3 + \beta y_3) = \alpha(x_1 - x_3) + \beta(y_1 - y_3) = 0 \\ \alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2 = \alpha(x_1 + x_2) + \beta(y_1 + y_2) = 0 \end{cases}$$

e quindi $\Sigma \in \mathbb{R}^3$. Per determinare un insieme di generatori di Σ cerchiamo il numero di soluzioni di Σ. La matrice associata a Σ è

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

È semplice osservare che una forma ridotta di tale matrice è

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e quindi il sistema ammette infinite soluzioni dipendenti da un parametro. In particolare lo spazio delle soluzioni è generato dal vettore $(1,-1,1)^T$ e quindi $\dim \Sigma = 1$.

Esercizio 28. Verificare che il sottoinsieme

$$r = \left\{ (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 | \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \right\}$$

è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ e che $r =< (1,1,1)^T >$.

Esercizio 29. Dimostrare che il sottoinsieme delle funzioni di classe C^1 di $\mathbb{R}$ in sè tali che $f' + f = 0$[3] è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

Esercizio 30. Verificare che il sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$ formato dai vettori $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ tale che

$$\Sigma = \begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$. Determinare un insieme di generatori, una base e la dimensione di Σ.

Esercizio 31. Verificare che il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ formato dai vettori $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ tale che

$$\Sigma = \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. Determinare un insieme di generatori, una base e la dimensione di Σ.

[3] Indichiamo con ' la derivata prima d f.

Esercizio 32. Si considerino i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ U e V rispettivamente formati dai vettori $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ tali che

$$\Sigma_U = \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \Sigma_V = \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

1. Verificare che sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$.
2. Determinarne la dimensione e una base di U e V.
3. Determinare la dimensione e una base dell'intersezione $U \cap V$.
4. U e V sono in somma diretta?

Esempio 16. Verificare se l'insieme

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori per $\mathbb{C}^4$. Estrarre da S una base di $\mathbb{C}^4$.

Sol. Per verificare che S è un insieme di generratori per $\mathbb{C}^4$ è sufficiente mostrare che la matrice A_S che ha per colonne i vettori di $\mathbb{C}^4$ abbia rango quattro, cioè che in S ci sono quattro vettori linearmente indipendenti. Si osservi che ciò equivale a dimostrare che ogni vettore $\mathbf{v}$ di $\mathbb{C}^4$ si può scrivere come combinazione lineare degli elementi di S, cioè che il sistema

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{5} \alpha_i s_i$$

in cui $\alpha_i \in \mathbb{C}$ $i = 1, \ldots, 5$ e gli s_i $i = 1, \ldots, 5$ denotano gli elementi di S, ammette soluzione (è compatibile). Dalla teoria dei sistemi lineare si ricava facilmente che tale sistema ammette soluzione se la colonna dei termini noti non è mai dominante, cioè se la matrice delle incognite ha rango quattro. Ora

$$A_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Applichiamo l'eliminazione di Gauss alla matrice A_S (moltiplicandola per le matrici elementari $E_{44}(-1)E_{43}(2)E_{42}(2)E_{41}(-2)$) ottenendo la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

che ha rango quattro avendo 4 colonne dominanti. Di conseguenza l'insieme S genera $\mathbb{C}^4$. Inoltre una base di $\mathbb{C}^4$ estratta da S è data da

$$\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Esempio 17. Sia $V = M_2(\mathbb{C})$ il $\mathbb{C}$-spazio vettoriale delle matrici complesse 2×2 e sia W il sottoinsieme delle matrici complesse simmetriche 2×2.

1. Verificare che W è sottospazio di $M_2(\mathbb{C})$.
2. Si consideri l'insieme
$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$
Provare che $< S >= W$ ed estrarre da S una base di W.

Sol. 1. È semplice verificare che W è $\mathbb{C}$-sottospazio di $M_2(\mathbb{C})$. Basta mostrare che per ogni $\mathbf{w}, \mathbf{z}$ in W e ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ si ha che $\alpha\mathbf{w} + \beta\mathbf{z} \in W$. Ciò si verifica semplicemente effettuando il calcolo e scrivendo espressamente il tipico elemento di W.

2. Sia $\mathbf{w}$ il generico elemento di W,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

Vogliamo verificare che ogni $\mathbf{w}$ di W si scrive come combinazione lineare a coefficienti complessi degli elementi di S, ossia che

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{5} \alpha_i s_i$$

in cui $\alpha_i \in \mathbb{C}$ e s_i $i = 1, \ldots, 5$ denotano gli elementi di S. Ciò equivale a richiedere che il seguente sistema lineare ammetta soluzione per ogni $\mathbf{w}$ in W

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = a \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 = b \\ \alpha_4 + \alpha_5 = c \end{cases}$$

Tale sistema ammette soluzione se e solo se la matrice dei termini noti non è dominante cioè se e solo se la matrice delle incognite (la matrice non-aumentata del sistema) ha rango massimo, cioè 4. Per mostrare ciò applichiamo l'eliminazione di Gauss alla matrice A_S delle incognite,

$$A_S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ottenendo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tale matrice ha rango massimo, infatti a tre colonne dominanti e quindi $W =< S >$. Inoltre si ha che $\dim W = 3$. Infine una base di W estratta dai vettori di S è data dai vettori corrispondenti alle colonne dominanti della forma ridotta di A_S, ad example dalla prima, seconda e quarta colonna, ricostruite come matrici, cioè dalle matrici s_1, s_2, s_4 di S.

Esercizio 33. Provare che il sottoinsieme W di $\mathbb{C}^4$ definito dai vettori $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ tali che

$$\Sigma_W = \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

è $\mathbb{C}$-sottospazio di $\mathbb{C}^4$. Determinare un insieme di generatori, la dimensione e una base di W. Sia, inoltre, $V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^4 | \ x_1 + x_2 = 0\}$; determinare la dimensione e una base di V. Infine determinare la dimensione e una base di di $W \cap V$. W e V sono in somma diretta?

Esercizio 34. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{C}^4$

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \right\}$$

Determinare $\dim < W >$ e una base per $< W >$. Quindi completare tale base ad una base di $\mathbb{C}^4$.

Esercizio 35. Si consideri lo spazio vettoriale reale delle funzioni continue di $\mathbb{R}$ in sè.

1. Dimostrare che l'insime $\{1, \sin^2, \cos^2\}$ è linearmente dipendente.

2. Dimostrare che l'insieme $\{\sin nx, \ n \in \mathbb{N}^*\} \cap \{\cos nx, \ n \in \mathbb{N}^*\}$ è linearmente indipendente.

3. Cosa si può dire a riguardo dell'insieme $\{\sin(\alpha + nx), \ n \in \mathbb{N}^*, \ \alpha \in \mathbb{R}\}$?

Esercizio 36. Si consideri il sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ determinato dalle soluzioni dell'equazione $x_1 + x_3 = 0$.

1. Determinare un sottospazio T di $\mathbb{R}$ tale che $\mathbb{R}^3 = W \oplus T$.
2. È possibile determinare un altro sotospazio T' di $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathbb{R}^3 = W \oplus T'$ e $T \cap T' = \mathbf{0}$. In caso affermativo effettuarne un example.

Esercizio 37. Si consideri i sottospazi di $\mathbb{R}^4$ $S_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 |\ x_1 = x_3\}$ $S_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_2 = -x_4\}$. Determinare la dimensione dei sottospazi S_1, S_2, $S_1 \cap S_2$ e $S_1 + S_2$, quindi esibire una base di ciascuno di essi.

Esercizio 38. Sia $V =< (1, 2, 0)^T,\ (1, 0, 2)^T >$ sottospazio di $\mathbb{R}^3$. Sia S_α, con $\alpha \in \mathbb{R}$, l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\Sigma_\alpha = \begin{cases} \alpha x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ \alpha x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - (\alpha - 1)x_3 = 0 \end{cases}$$

1. Determinare le soluzioni S_α di Σ_α.
2. S_α è sottospazio di $\mathbb{R}^3$? (Giustificare la risposta) Determinane una base.
3. Determinare la dimensione di V.
4. Dire per quali valori di α S_α e V sono in somma diretta.
5. Dire per quali valori di α $S_\alpha \cap V = \mathbf{0}$.

6 Applicazioni lineari e cambiamenti di base

Esempio 18. Dire se l'applicazione

$$\begin{aligned} f: \quad M_2(\mathbb{C}) &\longrightarrow \quad \mathbb{C}^2 \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} &\longmapsto \quad (a_{11} + a_{21}, a_{12} + a_{22})^T \end{aligned}$$

è lineare.

Sol. Dobbiamo mostrare che per ogni $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ e ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $f(\alpha A + \beta B) = \alpha f(A) + \beta(A)$. Siano $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned} f(\alpha A + \beta B) &= (\alpha a_{11} + \alpha a_{21} + \beta b_{11} + \beta b_{21}), \alpha a_{12} + \alpha a_{22} + \beta b_{12} + \beta b_{22})^T \\ &= \alpha(a_{11} + a_{21}, a_{12} + a_{22})^T + \beta(b_{11} + b_{21}, b_{12} + b_{22})^T \\ &= \alpha f(A) + \beta f(B) \end{aligned}$$

Quindi l'applicazione f è lineare.

Esempio 19. Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definito da $T(x, y, z) = (2y + z, x - 4y, 3x)^T$ un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in sè scritta rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ e sia $\mathcal{F} = \left\{f_1 := (1, 1, 1)^T,\ f_2 := (1, 1, 0)^T,\ f_3 := (1, 0, 0)^T\right\}$ un insieme di vettori di $\mathbb{R}^3$.

1. Dimostrare che $\mathcal{F}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
2. Scrivere la matrice $T_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}}$ associata a T rispetto alla base canonica.
3. Scrivere la matrice del cambiamento di coordinate $M_{\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{E}}$ dalla base canonica alla base $\mathcal{F}$.
4. Scrivere la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{F}$.

Sol. 1. L'insieme $\mathcal{F}$ definisce una base di $\mathbb{R}^3$ in quanto la matrice delle colonne $C(f_1, f_2, f_3)$ ha rango 3.

2.
$$T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. La matrice $M_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{E}}$ è l'inversa della matrice $M_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{F}}$, che ha per colonne i vettori f_1, f_2 e f_3, in quanto essi sono scritti rispetto alla base canonica. Quindi
$$M_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad M_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{E}} = (M_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{F}})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

4.
$$T_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{F}} = M_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{E}}\, T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}}\, M_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Esempio 20. Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $f_\alpha[x,y,z]^T = [-x + (2-\alpha)y + z,\ x - y + z,\ x - y + (4-\alpha)z]^T$.

1. Scrivere la matrice associata a f_α rispetto alla base canonica su dominio e codominio.
2. Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ f_α è iniettiva.
3. Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ f_α è suriettiva.
4. Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il vettore $[1,1,1]^T \in \mathrm{Im}(f_\alpha)$.
5. Determinare $N(f_1)$.
6. Costruire, se possibile, un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f_0)$.
7. Costruire, se possibile, un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\ker(h) = \ker(f_1)$.

Sol.

1. Dall'espressione di $f_\alpha(x,y,z)$ si ricava che $f_\alpha(e_1) = (-1,1,1)^T$, $f_\alpha(e_2) = [2-\alpha,-1,-1]^T$ e $f_\alpha(e_3) = [1,1,4-\alpha]^T$ e quindi la matrice associata a f_α rispetto alla base canonica su dominio e codominio è
$$(f_\alpha)_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}} \begin{bmatrix} -1 & 2-\alpha & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 4-\alpha \end{bmatrix}$$

2. Basta determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il vettore nullo $\mathbf{0}$ è l'unica soluzione del sistema lineare omogeneo
$$\begin{cases} -x + (2-\alpha)y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x - y + (4-\alpha)z = 0 \end{cases}$$
Dobbiamo cioè determinare per quali α la matrice $(f_\alpha)_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}}$ ha rango 3. Applicando l'eliminazione di Gauss alla matrice $(f_\alpha)_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}}$ si ottiene la matrice
$$\begin{bmatrix} -1 & 2-\alpha & 1 \\ 0 & 1-\alpha & 2 \\ 0 & 0 & 2-\alpha \end{bmatrix}$$
che ha rango 3 se e solo se $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq 3$. Quindi f_α è iniettiva se e solo se $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq 3$.

3. Essendo f_α un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in sè dal Teorema nullità + rango si ricava che f_α è iniettiva se e solo se è suriettiva, quindi f_α è suriettiva se e solo se $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq 3$.

4. È sufficiente determinare per quali α il sistema
$$\begin{cases} -x+(2-\alpha)y+z=1 \\ x-y+z=1 \\ x-y+(4-\alpha)z=1 \end{cases} \tag{1}$$
ammette soluzione. Dal punto precedente sappiamo che per ogni $\alpha \neq 1, 3$ f_α è suriettiva e quindi per tali α il vettore $(1,1,1)^T$ sta sicuramente in $Im(f_\alpha)$. Controlliamo cosa accade per $\alpha = 1$ e $\alpha = 1$.
• Sia $\alpha = 1$ e applichiamo al sistema (**??**) l'eliminazione di Gauss, ottenendo la matrice
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
La colonna dei termini noti di tale matrice è dominante, quindi il sistema lineare (**??**) non ammette soluzione e cioè il vettore $(1,1,1)^T$ non appartiene all'immagine di f_1.
• Se $\alpha = 3$ il sistema (**??**) è equivalente al sistema di matrice
$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
La colonna dei termini noti non è dominante, quindi il sitema ammette soluzione, in particolare ammette infinite soluzioni dipendenti da un paramentro. Di conseguenza il vettore $(1,1,1)^T$ sta nell'immagine di f_3.

5. $N(f_1) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 | \ (f_1)_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}}\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$. Dobbiamo cioè determinare una base per lo spazio delle soluzioni del sistema
$$\begin{cases} -x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \\ x-y+3z=0 \end{cases}$$
Abbiamo già determinato in precedenza la forma ridotta della matrice associata a tale sistema, da cui si ricava che $N(f_1) =< (1,1,0)^T >$.

6. I punti rimanenti sono lasciati per esercizio.

Esercizio 39. Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e sia $\mathcal{B}_V = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ una sua base.

1. Esiste un'applicazione lineare ϕ di V in sè tale che $\phi(\mathbf{v_1}) = 4\mathbf{v_1} - b\mathbf{v_2}$, $\phi(\mathbf{v_2}) = \mathbf{v_1} + v_2$ e $\phi(\mathbf{v_1} - 3\mathbf{v_2}) = \mathbf{v_1} - 10\mathbf{v_2}$? In caso affermativo determinarle tutte.

2. Determinare un'applicazione lineare φ di V in sè (esibirne una matrice associata) tale che $\varphi(\mathbf{v_1}) = \mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}$, $\varphi(\mathbf{v_1} + 2\mathbf{v_2}) = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$ e $\mathbf{v_3} - \mathbf{v_1} \in N(\varphi)$. φ è unica?

3. Esiste un'applicazione lineare f di V in sè tale che $f(\mathbf{v_1}) = \mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}$, $f(\mathbf{v_2}) = 3\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$ e $f(\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}) = -2\mathbf{v_1} - 2\mathbf{v_2}$? In caso affermativo determinarle tutte.

Esercizio 40. Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $f(x,y,z) = (x+y, x+y, z)^T$.

1. Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica.

2. Determinare $N(f)$ e $Im(f)$.

3. Mostrare che l'insieme $\mathcal{B} = \{b_1 := (1,1,-1)^T, b_2 := (1,1,0)^T, b_3 := (1,-1,0)^T\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

4. Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica nel dominio e alla base $\mathcal{B}$ nel codominio.

Esercizio 41. Sia T l'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in sè definita da $T(e_1) = (3,2,1)^T$, $T(-e_2) = (1,-2,3)^T$ e $T(e_1 - e_3) = (1,-2,3)^T$. Si consideri inoltre l'applicazione lineare $S_\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $S_\alpha(1,2) = (6,4,2)^T$ e $S_\alpha(2,-1) = (\alpha, 0, 4)^T$.

1. Scrivere la matrice associata a T rispetto alla base canonica.

2. Determinare $N(T)$ e $Im(T)$. Calcolarne la dimensione ed esibirne una base. T è iniettiva? È Suriettiva?
3. Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ $Im()T = Im(S_\alpha)$, inoltre, calcolare la dimensione dello spazio $Im(T) \cap Im(S_\alpha)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 42. Si consideri al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la famiglia di applicazioni lineari $T_\alpha \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ definite da $T_\alpha(x,y,z) = \begin{bmatrix} x+\alpha y & 0 \\ z & x-\alpha y \end{bmatrix}$.

1. Scrivere la matrice associata a T_α rispetto alle basi canoniche degli spazi in questione.
2. Determinare, al variere di $\alpha \in \mathbb{R}$, $N(T_\alpha)$ e $Im(T_\alpha)$.
3. Data la matrice $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, determinare la preimmagine di B relativa a T_α.
4. Posto $\alpha = 1$ e definita la matrice $B_\mu = \begin{bmatrix} 1 & \mu \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, determinare la preimmagine di B_μ rispetto a T_1, al variare di $\mu \in \mathbb{R}$.

Esercizio 43. Considerare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la famiglia di applicazioni lineari $T_\alpha : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{\leq 2}[x]$[4] definite da

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longmapsto a + x(b+\alpha c) + x^2(b-\alpha c)$$

1. Scrivere la matrice associata a T_α rispetto alle basi canoniche degli spazi in questione.
2. Dire per quali valori di α il polinomio $2x^2+x+1$ appartiene a ImT_α, quindi determinarne la preimmagine.
3. Posto $A := \cup_{\alpha\in\mathbb{R}} N(T_\alpha)$, determinare lo spazio generato da A.
4. Determinare uno sottospazio vettoriale $W \leq M_2(\mathbb{R})$ tale che $A \oplus W = M_2(\mathbb{R})$.

Esercizio 44. Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di dimensione 3 e sia $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ una sua base.

1. Verificare che esiste ed è unica, per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, l'applcazione lineare $T = T_\beta$ definita da $T_\beta(b_1+b_2) = b_1-b_2$, $T_\beta(b_1-b_2) = b_1-b_2$ e $T(b_3) = \beta b_3 + b_1 - b_2$.
2. Scrivere la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ su dominio e codominio.
3. Determinare, al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, una base di $N(T_\beta)$ e una base di $Im(T_\beta)$.
4. Determinare, al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, la preimmagine di $\mathbf{v} = b_1 - b_2 + b_3$.

Esercizio 45. Le matrici quadrate reali R $n \times n$ tali che $\det(R) = 1$ (determinante unitario) e che $R^{-1} = R^T$ (l'inversa coincide con la trasposta) si chiamano matrici ortogonali speciali $n \times n$. Dimostrare che l'insieme delle matrici ortogonali speciali $n \times n$ forma un gruppo rispetto alla moltiplicazione righe per colonne.

Sol. Le matrici reali $n \times n$ con determinante uguale a 1 e tali che $RR^T = \mathrm{id}_n$ sono dette matrici ortogonali speciali. In primo luogo mostriamo che il prodotto di due matrici ortogonali speciali è ancora una matrice ortogonale speciale, infatti siano R e S due matrici ortogonali speciali, allora $(RS)(RS)^T = RSS^TR^T = \mathrm{id}_n$, inoltre $\det(RS) = \det(R)\det(S) = \mathrm{id}_n$. La matrice identità è ovviamente una matrice ortogonale speciale, infatti essa coincide con la sua trasposta e con la sua inversa e ha determinante uno. La proprietà associativa è immediata e discende dalla proprietà associativa del prodotto righe per colonne. Per il determiannte sia ha, date R, S, T matrici ortogonali speciali, $\det((RS)T) = \det(RS)\det(T) = \det(R)\det(S)\det(T) = 1$. Sia ora R una matrice ortogonale speciale, mostriamo che anche la sua inversa R^{-1} è una matrice ortogonale speciale, $R^{-1}R^T = (RR^T)^{-T} = \mathrm{id}_n$, inoltre $\det(R^{-1}) = (\det(R))^{-1} = \mathrm{id}_n$.

Esercizio 46. Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $f(x,y,z) = [x+y, x+y, z]^T$.

1. Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica.
2. Determinare $Ker(f)$ e $Im(f)$.

[4] $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ denota lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 2.

3. Mostrare che l'insieme $\mathcal{B} = \{b_1 := [1, 1, -1]^T,\ b_2 := [1, 1, 0]^T,\ b_3 := [1, -1, 0]^T\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

4. Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica nel dominio e alla base $\mathcal{B}$ nel codominio.

Sol. 1. La matrice associata a f rispetto alla base canonica è

$$T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Il nucleo di f è dato dall'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}}\underline{x} = \underline{0}$, ossia $\ker f =< [-1, 1, 0]^T >$. Per il teorema nullità+rango sia ha che l'immagine ha dimensione 2 ed è semplice osservare che $\mathrm{Im} f =< [1, 1, 0]^T,\ [0, 0, 1]^T >$.

3. Per mostrare che $\mathcal{B}$ definisce una base di $\mathbb{R}^3$ basta mostrare che la matrice $M_{\mathcal{B}}$ che ha per colonne i vettori b_1, b_2, b_3 ha rango 3. Infatti usando l'eliminazione di Gauss (o calcolando il determinante) si ricava che

$$\mathrm{renk} M_{\mathcal{B}} = \mathrm{renk} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3$$

4. La matrice associata a f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ nel dominio e alla base $\mathcal{B}$ nel codominio è $T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}}$, in cui $M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}$ è la matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base $\mathcal{B}$, che è l'inversa della matrice $M_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$ che ha per colonne i vettori della base $\mathcal{B}$:

$$M_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e quindi

$$M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = M^{-1}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi la matrice associata a f rispetto alla base canonica nel dominio e a alla base $\mathcal{B}$ nel codominio è

$$T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 47. Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $f_\alpha(x, y, z) = [-x + (2 - \alpha)y + z,\ x - y + z,\ x - y + (4 - \alpha)z]^T$.

1. Scrivere la matrice associata a f_α rispetto alla base canonica su dominio e codominio.
2. Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ f_α è iniettiva.
3. Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ f_α è suriettiva.
4. Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il vettore $[1, 1, 1]^T \in \mathrm{Im}(f_\alpha)$.
5. Determinare $\ker(f_1)$.
6. Costruire, se possibile, un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f_0)$.
7. Costruire, se possibile, un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\ker(h) = \ker(f_1)$.

Sol. 1. La matrice associata a f_α rispetto alla base canonica su dominio e codominio è

$$T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}}[\alpha] = \begin{bmatrix} -1 & 2-\alpha & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 4-\alpha \end{bmatrix}$$

2. e 3. Rispondiamo assieme alle domande 2. e 3. usando il teorema nullità+rango. Infatti f_α è iniettiva se e solo se è suriettiva, essendo f_α un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in sè. Ci basta sapere, quindi, per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il rango della matrice $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}}[\alpha]$ è 3. Per far ciò conviene determinare per quali valori di α il determinante di $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}}[\alpha]$ sia non nullo. Ora $\det T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}}[\alpha] = 3$ se e solo se $\det(T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}})[\alpha] = -\alpha^2 + 4\alpha - 3 = 0$ cioè per $\alpha = 1$ oppure $\alpha = 3$. Quindi f_α è iniettiva e suriettiva per $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq 3$.

4. Osserviamo che $[1, 1, 1]^T \in \mathrm{Im}(f_\alpha)$ per $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq 3$. È semplice ora osservare che per $\alpha = 1$ $[1, 1, 1]^T \notin \mathrm{Im}(f_1)$, poiché il sistema $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}}[1]\underline{x} = [1, 1, 1]^T$ non ammette soluzione. Invece $[1, 1, 1]^T \in \mathrm{Im}(f_3)$.

5. Il nucleo di f_1 è dato dall'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}}[1]\underline{x} = \underline{0}$, cioè $\ker f_1 =< [1, 1, 0]^T >$.

6. Ricordiamo che per $\alpha = 0$ f_α è suriettiva e quindi $\dim \mathrm{Im} f_0 = 3$, per il teorema nullità + rango non può quindi esistere un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f_0)$.

7. Abbiamo visto che $\ker(f_1) =< [1, 1, 0]^T >$, cerchiamo quindi un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\ker(h) =< [1, 1, 0]^T >$. Per il teorema nullità + rango una siffatta applicazione lineare certamente esiste. Una tale h è ad example $h(x, y) = (x - y, x - y, x - y)$.

Esercizio 48. ☻ Si consideri al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la famiglia di applicazioni lineari $T_\alpha : \mathbb{R}^3 \longrightarrow M_{2\times2}(\mathbb{R})$ definite da $T_\alpha(x, y, z) = \begin{bmatrix} x + \alpha y & 0 \\ z & x - \alpha y \end{bmatrix}$.

1. Scrivere la matrice associata a T_α rispetto alle basi canoniche degli spazi in questione.
2. Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\ker(T_\alpha)$ e $\mathrm{Im}(T_\alpha)$.
3. Data la matrice $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, determinare la preimmagine di B relativa a T_α.
4. Posto $\alpha = 1$ e definita la matrice $B_\mu = \begin{bmatrix} 1 & \mu \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, determinare la preimmagine di B_μ rispetto a T_1, al variare di $\mu \in \mathbb{R}$.

Sol. 1. La matrice associata a T_α rispetto alle basi canoniche degli spazi in questione è

$$T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}}[\alpha] = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

in cui si è identificato $M_2(\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^4$.

2. $\ker T_\alpha$ è dato dall'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}}[\alpha]\underline{x} = \underline{0}$. Si ricava che se $\alpha \neq 0$ allora T_α è iniettiva, cioè $\ker T_\alpha = \underline{0}$. Se invece $\alpha = 0$ $\ker T_0$ è lo spazio generato da $[0, 1, 0]^T$.

   Per l'immagine di T_α dobbiamo dire per quali α il generico elemento di $M_2(\mathbb{R})$ sta in $\mathrm{Im}T_\alpha$. Si hanno due casi, se $\alpha \neq 0$ allora il generico vettore di $\mathrm{Im}T_\alpha$ è

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}$$

   con $a, b, c \in \mathbb{R}$, cioè $\dim \mathrm{Im}T_\alpha = 3$. Se $\alpha = 0$, invece il generico vettore di $\mathrm{Im}T_0$ è

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix}$$

   con $a, b \in \mathbb{R}$, cioè $\dim \mathrm{Im}T_0 = 2$.

3. Dobbiamo determinare le soluzioni, al variare di α, del sistema lineare $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}}[alpha]\underline{x} = [1, 0, 1, 0]^T$. Se $\alpha = 0$ $B \notin \mathrm{Im}T_0$ (ovvio da sopra). Se $\alpha \neq 0$ allora $T_\alpha^{\leftarrow}(B) = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2\alpha}, 1]^T$.

4. Ovviamente se $\mu \neq 0$ B_μ non è immagine di alcun elemento di $\mathbb{R}^3$. Se invece $\mu = 0$ ritorniamo ad uno deo casi precedenti, infatti $B_0 = B$ e $B \in \mathrm{Im}T_\alpha$ per $\alpha \neq 0$, in particolare quindi per $\alpha = 1$ e $T_1^{\leftarrow}(B_0) = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1]^T$.

7 Spazi vettoriali euclidei

Esempio 21. Si consideri il $\mathbb{C}$-sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^4$ $A =< a_1 = (i, 0, 0, 1)^T,\ a_2 = (1, 0, i, 1)^T,\ a_3 = (2i, 1, 3, i)^T,\ a_4 = (2-1, -1, -3+2i, 3-i)^T >$.

1. Determinare una base ortogonale di A.
2. A è isomorfo a $\mathbb{C}^4$? In caso negativo completare la base prima ottenuta per A ad una base ortonormale di $\mathbb{C}^4$.

Esercizio 49. Si consideri il $\mathbb{C}$-sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^4$ $V =< v_1 = (i, 0, 0, 1)^T,\ v_2 = (1, 0, i, 1)^T,\ v_3 = (-3+2i, 0, -3i, -1)^T$,

1. Determinare una base ortogonale di V.
2. Completare la base prima ottenuta per V ad una base ortonormale di $\mathbb{C}^4$.

Esercizio 50. Si considerino i sottospazi $U =< (5, 1, 7, 0)^T,\ (1, 0, 0, 1)^T,\ (0, 1, 2, 6)^T >$ e $W =< (1, 0, 2, 1)^T,\ (1, 0, 1, 1)^T >$ di $\mathbb{R}^4$.

1. Determinare le dimensioni ed esibire una base di U e W, rispettivamente.
2. Fornire una stima della dimensione di $U \cap W$ e $U + W$. La somma $U + W$ è diretta?
3. Determinare la dimensione e una base di $U \cap W$.
4. Determinare la dimensione e una base di $U + W$.
5. Determinare una base ortogonale di U. Completarla ad una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 51. Si considerino i vettori $v_1 = (1, 0, 1, 0)^T$, $v_2 = (3, 1, 0, 1)^T$, $v_3 = (-1, 1, 1, 2)^T$, $v_4 = (1, 1, 1, 1)^T$ e $v_5 = (4, 2, 1, 0)^T$.

1. $< v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 >= \mathbb{R}^4$?
2. A partire dai vettori v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 estrarre una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 52. Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale euclideo di dimensione 3 e sia $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ una sua base ortonormale. Si consideri l'applicazione lineare $P : V \longrightarrow V$, la cui matrice associata rispetto alla basse $\mathcal{B}$ è

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

1. Verificare che P èuna matrice di proiezione ortogonale.
2. Determinare una base ortonormale di $U := Im\,P$.
3. Guardando a V come spazio affine e posto $P_0 = (0, 0, 1)$ e $\mathcal{V} = P_0 + U$, $P = (1, 1, 1)$, determinare il punto $P' \in \mathcal{V}$ a distanza minima da P.

Esempio 22. Si consideri la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ di $\mathbb{C}^3$, dove

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dato $\alpha \in \mathbb{C}$, si consideri l'unica applicazione lineare $f_\alpha \colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tale che

$$\begin{aligned} f_\alpha(\mathbf{v}_1) &= \mathbf{v}_1 + \alpha\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \\ f_\alpha(\mathbf{v}_2) &= 2\mathbf{v}_1 - \alpha\mathbf{v}_2, \\ f_\alpha(\mathbf{v}_3) &= \alpha\mathbf{v}_3. \end{aligned}$$

Si dica per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha $[1\ 1\ -1]^T \in \mathrm{Im}(f_\alpha)$ e si costruisca una base ortonormale di $\mathbb{C}^3$ contenente $\mathbf{v}_1$.

Sol. Chiamiamo $\mathbf{A}_{f_\alpha}$ la matrice associata all'applicazione lineare f_α, allora il vettore $[1 \quad 1 \quad -1]^T$ di $\mathbb{C}^3$ è un elemento dell'immagine di f_α se il sistema

$$\mathbf{A}_{f_\alpha}\,\mathbf{v} = [1 \quad 1 \quad -1]^T$$

ammette soluzione e ciò si ha per $\alpha \neq 0$.

Costruiamo ora una base ortonormale di $\mathbb{C}^3$ contenente $\mathbf{v}_1$. Poniamo $\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\sqrt{(\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_1)}}$, per cui gli altri elementi di una base ortonormale di $\mathbb{C}^3$ si ottengono applicando l'algoritmo di G-S a $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$.

$$\mathbf{v'}_2 = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2)\mathbf{u}_1 = [-1 \quad 1 \quad 1]^T$$

quindi

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v'}_2}{(\mathbf{v'}_2|\mathbf{v'}_2)} = \frac{1}{\sqrt{3}}[-1 \quad 1 \quad 1]^T$$

$$\mathbf{v'}_3 = \mathbf{v}_3 - (\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_3)\mathbf{u}_1 - (\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_3)\mathbf{u}_2$$

e quindi

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{v'}_3}{(\mathbf{v'}_3|\mathbf{v'}_3)} = [\frac{1}{\sqrt{3\left(2-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)}} \quad \frac{1}{2}\sqrt{2-\frac{2}{\sqrt{3}}} \quad -\frac{1}{\sqrt{3\left(2-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)}}]$$

Una base richiesta è $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$.

Esercizio 53. 1. Si diano le definizioni di prodotto scalare e di spazio vettoriale metrico.

2. In uno spazio vettoriale metrico V con norma $||\cdot||$ si verifichi che per $x, y \in V$ si ha

$$\| x+y \|^2 + \| x-y \|^2 = 2\| x \|^2 + 2\| y \|^2 \quad (\textit{uguaglianza del parallelogramma}).$$

3. Si verifichi che la seguente applicazione $< \cdot,\cdot >: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è un prodotto scalare definito positivo:

$$< x, y >= 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

Esercizio 54.

Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 3 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Si determinino il polinomio caratteristico e gli autovalori di A.
2. Per ogni autovalore λ di A si determini una base dell'autospazio E_λ.
3. Si diagonalizzi A, cioè si trovino una matrice $P \in Gl(3, \mathbb{R})$ e una matrice diagonale $D \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tali che $P^{-1}AP = D$.
4. Si calcoli $\det A$.

Esercizio 55. Si decida se l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x+z \\ y+z \\ x+y \end{bmatrix}$$

è un isomorfismo e si determini eventualmente l'applicazione inversa.

Esercizio 56.

Siano $A := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$ e $B := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$. Si dimostri che non può esistere una matrice $X \in M_{4\times 2}(\mathbb{R})$ tale che $A\,X = B$.

Esercizio 57. Sia $n \in \mathbb{N}$. Si ricordi che una matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ è simmetrica se $A = A^T$.

1. Siano $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ due matrici simmetriche. Si dimostri: AB è simmetrica se e solo se vale $AB = BA$.
2. Si dia un example di matrici simmetriche $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tali che la matrice AB non è simmetrica.

8 Diagonalizzazione

Esercizio 58. Determinare in due modi diversi il determinante della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 59. Si consideri la matrice

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Determinare il polinomio caratteristico di G.

2. Determinare gli autovalori di G.

3. Determinare la molteplicità algebrica e geometrica di ogni autovalore di G.

4. Determinare gli autovettori di G.

Esercizio 60. Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Dimostrare che A e A^T hanno gli stessi autovalori, ma non necessariamente gli stessi autovettori.

Esercizio 61. ☻ Dimostrare che il determinante di una matrice a blocchi del tipo

$$\begin{bmatrix} B & * \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

è $\det B \cdot \det C$.