Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2009/2010
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Prova scritta per il Corso di Algebra Lineare

22 giugno 2010

1. Si consideri l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - z \\ y + z \end{pmatrix}$$

   (a) Si determini la matrice A associata a f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$. (*2 punti*)

   (b) Si determini la matrice A' associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\}$ di $\mathbb{R}^2$. (*4 punti*)

   (c) Si decida (motivando la risposta) se f è un'applicazione suriettiva. (*2 punti*)

2. Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

   (a) Si determinino il polinomio caratteristico e gli autovalori di A. (*2 punti*)

   (b) Per ogni autovalore λ di A si determini una base dell'autospazio E_λ. (*4 punti*)

   (c) Si diagonalizzi A, cioè si trovino una matrice $P \in Gl(3, \mathbb{R})$ e una matrice diagonale $D \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tali che $P^{-1}AP = D$. (*2 punti*)

3. Si decida se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^5$ sono anche sottospazi.

$$U_1 = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + x_2 = 3\} \qquad U_2 = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \mid \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 0\}.$$

   (*4 punti*)

4. Si enuncino le definizioni di applicazione lineare e di nucleo di un'applicazione lineare. (*4 punti*)

5. Per $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ consideriamo l'applicazione $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, $x \mapsto Ax$. Si dimostri: Se A ammette un'inversa destra, allora f è un'applicazione suriettiva. (*6 punti*)

Per ogni risposta è indispensabile fornire calcoli e spiegazioni !

Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2009/2010
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Prova scritta per il Corso di Algebra Lineare

14 luglio 2010

1. Si determini la matrice M associata all'applicazione lineare
$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ 2x_1 + x_3 \\ 3x_2 \end{pmatrix}$$
rispetto alla base canonica (su dominio e codominio). Inoltre si decida se f è un isomorfismo e si determini eventualmente l'applicazione inversa. (*8 punti*)

2. Si consideri la seguente matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 3 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Si determinino il polinomio caratteristico e gli autovalori di A. (*2 punti*)
   (b) Per ogni autovalore λ di A si determini una base dell'autospazio E_λ. (*4 punti*)
   (c) Si diagonalizzi A, cioè si trovino una matrice $P \in Gl(3, \mathbb{R})$ e una matrice diagonale $D \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ tali che $P^{-1}AP = D$. (*2 punti*)

3. Sia $A \in M_{5\times5}(\mathbb{R})$ una matrice tale che $A^T = -A$. Si calcoli $\det A$. (*4 punti*)

4. Sia V uno spazio vettoriale e siano U, W due sottospazi di V.
   (a) Si definisca la somma $U + W$. (*2 punti*)
   (b) La somma $U + W$ coincide con l'unione con $U \cup W$? (*2 punti*)
   (c) Si enunci la formula di Grassmann. (*2 punti*)

5. Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matrice con un autovalore complesso $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Si decida se il coniugato $\overline{\lambda}$ è un autovalore di A. (*4 punti*)

Per ogni risposta è indispensabile fornire calcoli e spiegazioni !