

IL CALCOLO DELLE PROBABILITA'

Il concetto di *probabilità di un evento casuale* si può definire come un opportuno numero indice, compreso fra *zero* e *uno*, che intende esprimere la possibilità che l'evento medesimo possa verificarsi.

I) Definizione classica o matematica o "a priori" di probabilità:

dato un evento casuale E, la probabilità che tale evento si verifichi è data dal valore del seguente rapporto:

$$p(E) = \frac{\text{numero - di - casi - favorevoli}}{\text{numero - di - casi - egualmente - possibili}}$$

II) Definizione frequentista o statistica o "a posteriori" di probabilità:

la probabilità di un evento è quel numero cui converge la *frequenza relativa* dell'evento in considerazione, al crescere del numero delle prove, fatte tutte nelle medesime condizioni:

$$P(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n}$$

(*Legge - empirica - del - caso*)

III) Definizione soggettivista di probabilità:

la probabilità di un evento casuale è la misura del grado di fiducia che un individuo attribuisce, secondo le sue opinioni e informazioni, al verificarsi dell'evento.

IV) **Definizione assiomatica di probabilità:**

CLASSIFICAZIONE DEGLI EVENTI

Eventi casuali **incompatibili** e eventi casuali **compatibili**

Eventi casuali compatibili: eventi **indipendenti** e eventi **dipendenti**

In via assiomatica la probabilità di un evento E_1 è quel numero reale p che soddisfa le seguenti condizioni:

- 1) $0 \leq p \leq 1$
- 2) se E_1 è un evento certo allora $P(E_1)=1$;
- 3) se E_1 è un evento impossibile allora $P(E_1)=0$;
- 4) se E_1, E_2, \dots, E_n costituiscono una successione finita o un'infinità numerabile di eventi mutuamente incompatibili, di probabilità rispettivamente $P(E_1), P(E_2), \dots, P(E_n)$, si ha:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_n)$$

dove il simbolo $E_1 \cup E_2$ indica l'unione dei due eventi;

5) se E_1 e E_2 sono due eventi, indicata con $P(E_2/E_1)$ la probabilità di E_2 quando si suppone che E_1 si sia verificato, vale l'assioma della probabilità condizionata:

$$P(E_2 / E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}$$

Dove $P(E_1) > 0$ e $P(E_1 \cap E_2)$ indica la probabilità dell'intersezione dei due eventi. Per simmetria, si ha anche:

$$P(E_1 / E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$$

I TEOREMI DELLE PROBABILITA'

IL TEOREMA DELLE PROBABILITA' TOTALI O TEOREMA DELLA "SOMMA"

IL TEOREMA DELLE PROBABILITA' TOTALI PER EVENTI
INCOMPATIBILI:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

IL TEOREMA DELLE PROBABILITA' TOTALI PER EVENTI
COMPATIBILI:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

IL TEOREMA DELLE PROBABILITA' COMPOSTE O TEOREMA DEL "PRODOTTO"

IL TEOREMA DELLE PROBABILITA' COMPOSTE PER EVENTI
INDIPENDENTI

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

IL TEOREMA DELLE PROBABILITA' COMPOSTE PER EVENTI
DIPENDENTI

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B / A) = P(B) \cdot P(A / B)$$

ESERCIZIO

In una certa scuola, il 25% degli studenti è stato bocciato in matematica, il 15% è stato bocciato in chimica e il 10% è stato bocciato sia in matematica sia in chimica. Viene scelto a caso uno studente.

- Se egli è stato bocciato in chimica, qual è la probabilità che sia stato bocciato in matematica?
- Se egli è stato bocciato in matematica, qual è la probabilità che sia stato bocciato in chimica?
- Qual è la probabilità che sia stato bocciato in matematica o in chimica?

SOLUZIONI

Sia M ={studenti bocciati in matematica} e C ={studenti bocciati in chimica}; allora

$$P(M)=0,25; P(C)=0,15; P(M \cap C)=0,10$$

- la probabilità che uno studente sia stato bocciato in matematica, se si sa che è stato bocciato in chimica, è

$$P(M/C) = \frac{P(M \cap C)}{P(C)} = \frac{0,10}{0,15} = \frac{2}{3}$$

- la probabilità che uno studente sia stato bocciato in chimica, se si sa che è stato bocciato in matematica, è

$$P(C/M) = \frac{P(M \cap C)}{P(M)} = \frac{0,10}{0,25} = \frac{2}{5}$$

- Poichè M e C sono eventi compatibili si applica il teorema delle probabilità totali per eventi compatibili:

$$P(M \cup C) = P(M) + P(C) - P(M \cap C) = 0,25 + 0,15 - 0,10 = 0,30 = \frac{3}{10}$$

ESERCIZIO

Le bottiglie di vino in vendita in una bottiglieria, classificate secondo la *tipologia* (rosso, bianco, rosé) e la *fascia di prezzo* cui appartengono (prezzo basso, prezzo medio, prezzo alto), risultano così distribuite:

TIPOLOGIA	PREZZO		
	BASSO	MEDIO	ALTO
ROSSO	70	230	500
BIANCO	150	250	300
ROSE'	180	220	100

calcolare:

- la probabilità di una bottiglia di vino ROSSO oppure di prezzo MEDIO;
- la probabilità di una bottiglia di vino BIANCO oppure ROSE';
- la probabilità di una bottiglia di vino BIANCO sapendo che appartiene alla fascia di prezzo ALTO, ovvero $P(\text{vino BIANCO/prezzo ALTO})$;
- la probabilità di una bottiglia di vino ROSE' e di prezzo MEDIO (l'uno e l'altro).

SOLUZIONI

- eventi compatibili: $P(\text{ROSSO} \cup \text{MEDIO}) = 800/2000 + 700/2000 - 230/2000 = 0,635$
- eventi incompatibili: $P(\text{BIANCO} \cup \text{ROSE}') = 700/2000 + 500/2000 = 0,6$
- $P(\text{BIANCO}/\text{ALTO}) = 300/900 = 0,3333$
- $P(\text{ROSE}' \cap \text{MEDIO}) = 220/2000 = 0,11$

ESERCIZIO

Tre malattie M_1 , M_2 e M_3 producono i sintomi *febbre* (F), *ipertensione* (I) e *nessun sintomo* (N) con le frequenze indicate nella seguente tabella:

MALATTIA	SINTOMO		
	F	I	N
M1	50	30	20
M2	10	40	10
M3	0	150	90

Calcolare:

- qual è la malattia più probabile, indipendentemente dai sintomi;
- qual è la probabilità di avere la malattia M_1 oppure la malattia M_2 ($P(M_1 \cup M_2)$);
- qual è la malattia più probabile se è presente la *febbre*;
- qual è la probabilità che siano presenti congiuntamente la malattia M_2 e l'*ipertensione* ($P(M_2 \cap I)$);
- verificare come si può ottenere il risultato di cui in d) usando i Teoremi delle Probabilità.

SOLUZIONI

- $P(M_1) = 100/400 = 25\%$; $P(M_2) = 60/400 = 15\%$; $P(M_3) = 240/400 = 60\%$
- $P(M_1 \cup M_2) = P(M_1) + P(M_2) = 40\%$
- $P(M_1/F) = 50/60 = 83,333\%$; $P(M_2/F) = 10/60 = 16,6667\%$; $P(M_3/F) = 0/60 = 0\%$
- $P(M_2 \cap I) = 40/400 = 10\%$

$$\begin{aligned} \text{e) } P(M_2 \cap I) &= P(M_2) * P(I/M_2) = (60/400) * (40/60) = 10\% = \\ &= P(I) * P(M_2/I) = (220/400) * (40/220) = 10\% \end{aligned}$$