



Esercitazione n. 1 del 05/04/2016

Docente: Bruno Gobbi

CALCOLO COMBINATORIO

DISPOSIZIONI

SEMPLICI
$$D_{n,s} = \frac{n!}{(n-s)!}$$

CON RIPETIZIONE
$$D'_{n,s} = n^s$$

PERMUTAZIONI

SEMPLICI
$$P_n = n!$$

CON RIPETIZIONE
$$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

COMBINAZIONI

SEMPLICI
$$C_{n,s} = \binom{n}{s}$$

CON RIPETIZIONE
$$C'_{n,s} = \binom{n+s-1}{s}$$



1) In quanti modi 8 persone possono sedersi su una panchina da 3 posti?

Poiché i modi in cui si possono sedere le persone si differenziano fra di loro sia per la presenza di persone diverse che per l'ordine in cui si siedono, siamo di fronte ad una Disposizione semplice di 8 elementi in gruppi di 3:

$$D_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!} = 336$$

2) In quante maniere possono classificarsi sul podio i 20 piloti di Formula 1?

Anche in questo caso conta sia la presenza di piloti diversi che il loro ordine nei primi 3 posti, quindi abbiamo ancora a che fare con una Disposizione:

$$D_{20,3} = \frac{20!}{(20-3)!} = 6.840$$

E se al primo posto volessimo sempre Vettel?

Se volessimo che il ferrarista tedesco fosse sempre vincente, il problema si ridurrebbe nel calcolo delle Disposizioni di 19 piloti disposti sui due gradini più bassi del podio:

$$D_{19,2} = \frac{19!}{(19-2)!} = 342$$

3) Quanti numeri di 3 cifre posso creare usando una sola volta ogni cifra? (valgono anche i casi con gli zeri davanti, es. 012, 013, ecc.)

Dato che ogni numero si differenzia dall'altro sia per la presenza di cifre diverse che per il loro ordine, calcoliamo le possibili Disposizioni nel seguente modo:

$$D_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = 720$$



4) Quanti numeri di 3 cifre posso creare anche usando più volte ogni cifra?

In maniera intuitiva, i numeri di 3 cifre sono la successione di numeri naturali da 000, 001, 002, ..., 999, ovvero le Disposizioni con ripetizione di 10 elementi in gruppi di 3:

$$D'_{10,3} = 10^3 = 1.000$$

5) Quanti parole di 3 lettere, anche senza significato, posso creare usando le lettere “a, b, c, d, e”?

Considerando anche i casi in cui le lettere si ripetono (es. aaa, aab, ecc.) le Disposizioni con ripetizione diventano:

$$D'_{5,3} = 5^3 = 125$$

6) Quanti parole di 3 lettere, con solo lettere ripetute, posso creare usando solo le lettere “a, b, c, d, e”?

Per rispondere a questa domanda conviene fare la differenza fra le Disposizioni con ripetizione e le Disposizioni semplici così da ricavare solo i casi dove ci sono lettere ripetute:

$$D'_{5,3} = 5^3 = 125$$

$$D_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

Quindi le parole con lettere ripetute saranno date dalla differenza:

$$125 - 60 = 65$$

7) Determinare quanti sono i possibili modi di fare 13 al Totocalcio.

Nel gioco del Totocalcio si deve indovinare fra 3 possibili risultati (1, X, 2) riguardanti 13 partite di calcio. Quindi calcoliamo:

$$D'_{3,13} = 3^{13} = 1.594.393$$



8) In quanti modi diversi un negoziante può disporre 10 oggetti diversi nella sua vetrina?

In questo esempio si considerano tutti gli elementi a disposizione, quindi i gruppi si differenziano fra di loro solo per l'ordine e non per la presenza di elementi diversi. Calcoliamo perciò le Permutazioni semplici con la formula:

$$P_{10} = 10! = 3.628.800$$

9) Quante parole di 5 lettere, anche prive di significato, posso creare usando "a, b, c, d, e"?

Si parla ancora di Permutazioni perché abbiamo vogliamo creare gruppi formati da tutti i 5 elementi che abbiamo a disposizione, quindi le differenze fra i gruppi riguarderanno solo l'ordine degli elementi stessi:

$$P_5 = 5! = 120$$

10) Quante parole, anche prive di significato, posso creare usando tutte le lettere contenute nella parola "computer"?

Calcoliamo quindi le Permutazioni delle 8 lettere contenute nella parola "computer":

$$P_8 = 8! = 40.320$$

11) Quante parole, anche prive di significato, posso creare usando tutte le lettere contenute nella parola "matematica"?

Nella parola "matematica" la "m" si ripete 2 volte, la "a", 3 volte e la "t" 2 volte. Quindi dobbiamo usare la formula per le Permutazioni con ripetizione:

$$P_{10}^{2,3,2} = \frac{10!}{2! 3! 2!} = 151.200$$



12) Quante sarebbero state le possibilità per il negoziante dell'esercizio n. 8 di disporre i suoi prodotti, se avesse avuto a disposizione 4 copie dell'oggetto A, 3 dell'oggetto B, 2 del C e 1 del D?

Se il negoziante avesse avuto più copie di uno stesso prodotto, il problema andrebbe risolto applicando la formula delle Permutazioni con ripetizione:

$$P_{10}^{4,3,2} = \frac{10!}{4! 3! 2!} = 12.600$$

13) In quanti modi 7 amici possono viaggiare su un'auto con 5 posti?

In questo caso non è importante l'ordine delle persone, ma solo la presenza di persone diverse in auto. Le Combinazioni semplici di 7 elementi in gruppi da 5 sono:

$$C_{7,5} = \binom{7}{5} = 21$$

E se solo uno avesse la patente?

Se solo una persona avesse la patente e dovesse essere sempre presente sull'auto, il problema si ridurrebbe al calcolo delle Combinazioni di 6 persone in 4 posti:

$$C_{6,4} = \binom{6}{4} = 15$$

14) Una famiglia vuole trascorrere 2 weekend al mare scegliendo fra 4 possibili località (Jesolo, Sottomarina, Rimini, Milano Marittima). Quante scelte possono fare se non interessa l'ordine delle località e non si esclude di tornare nello stesso posto?

Poiché non conta l'ordine delle località, ma solo la presenza di destinazioni diverse, che possono anche ripetersi, dobbiamo calcolare le Combinazioni con ripetizione di 4 elementi in gruppi da 2:

$$C'_{4,2} = \binom{4 + 2 - 1}{2} = 10$$

A titolo esemplificativo, le combinazioni in questione sarebbero: JS, JR, JM, SR, SM, RM, JJ, SS, RR, MM