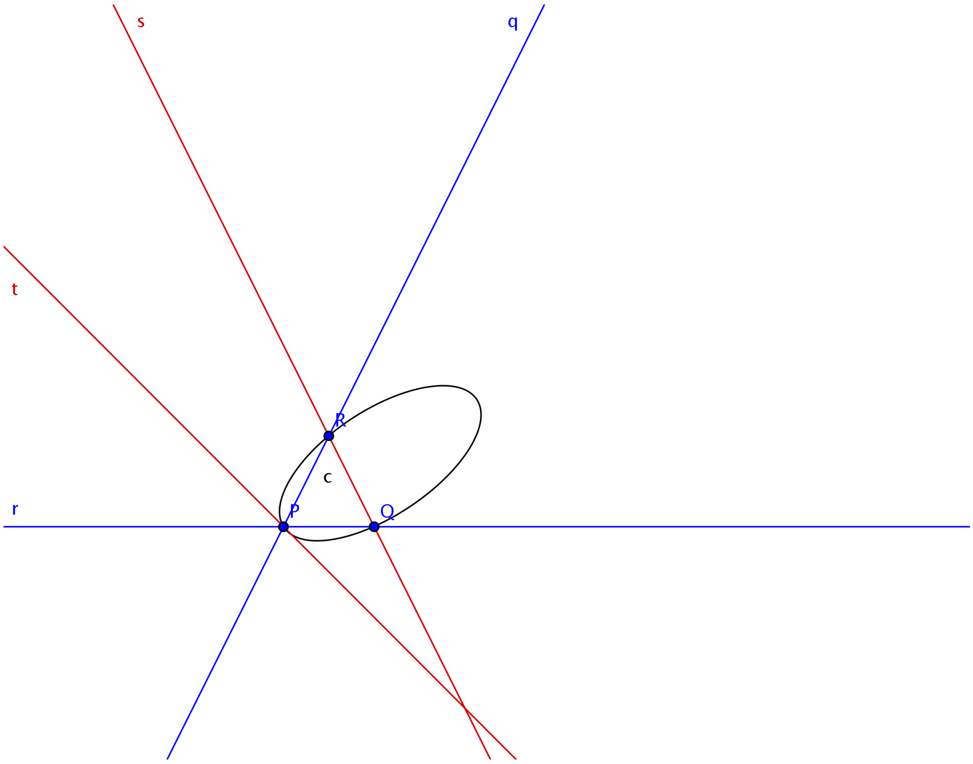
ESERCIZI DI GEOMETRIA PROIETTIVA: FASCI DI CONICHE E POLARITÀ

SANSONETTO NICOLA

Esempio 1. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si consideri il fascio $\mathcal{F}$ di coniche tangenti in $P:(1,-1,-1)$ alla retta $t:\ 2x_0+x_1+x_2=0$ e passante per i punti $R:(1,01)$ e $Q:(1,1,-1)$.

(1) Determinare l'equazione generale del fascio $\mathcal{F}$ e determinare le coniche degenri di $\mathcal{F}$.
(2) Sul piano affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ complementare di $x_0=0$ clasificare le coniche del fascio.

Sol. (1) Dobbiamo scrivere l'equazione di un fascio $\mathcal{F}$ di coniche passanti per tre punti e tangenti ad una retta data in uno di questi punti. Il fascio è quindi generato dalle sue coniche degeneri $\mathcal{C}_1=ts$ e $\mathcal{C}_2=rq$, in cui s è la retta per RQ, r la retta per PQ e q la retta per PR.



$$s:\ x_0-2x_1-x_2=0$$
$$r:\ x_0+2x_1-x_2$$
$$q:\ x_0+x_2=0$$

Quindi l'equazione generale del fascio è

$$\mathcal{F}:\ \lambda(2x_0+x_1+x_2)(x_0-2x_1-x_2)+\mu(x_2+2x_1-x_2)(x_0+x_2)=0$$

che si riscrive

$$\mathcal{F}:\ (2\lambda+\mu)x_0^2-2\lambda x_1^2-(\lambda+\mu)x_2^2+(2\mu-3\lambda)x_0x_1-\lambda x_0x_2+(2\mu-3\lambda)x_1x_2=0$$

Come già detto in precedenza le coniche degenri del fascio sono solo $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$.

Date: 22 dicembre 2014.
e-mail: nicola.sansonetto@gmail.com.

(2) Per classificare affinemente le coniche non–degeneri del fascio andiamo a studiare il segno del determinante del minore $A_{00}(\lambda,\mu)$ al variare di λ e μ, in cui $A(\lambda,\mu)$ è la matrice associata alla conica:

$$A(\lambda,\mu)=\begin{bmatrix} 2\lambda+\mu & \frac{2\mu-3\lambda}{2} & -\frac{\lambda}{2} \\ \frac{2\mu-3\lambda}{2} & -2\lambda & \frac{2\mu-3\lambda}{2} \\ -\frac{\lambda}{2} & \frac{2\mu-3\lambda}{2} & -\lambda-\mu \end{bmatrix}$$

Ora

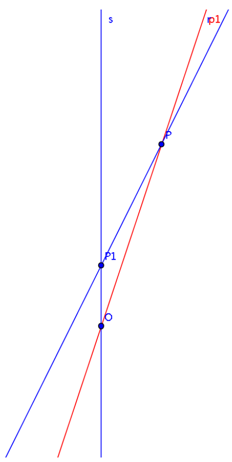
$$A_{00}(\lambda,\mu)=\begin{bmatrix} -2\lambda & \frac{2\mu-3\lambda}{2} \\ \frac{2\mu-3\lambda}{2} & -\lambda-\mu \end{bmatrix}$$

Sappiamo che se $\lambda=0$ e $\mu\neq 0$ o viceversa si ottiene una delle coniche degeneri $\mathcal{C}_1$ o $\mathcal{C}_2$, rispettivamente, quindi possiamo assumere ad esempio $\lambda\neq 0$. Per semplicità assumiamo $\lambda=2$ per cui $\det(A_{00}(\lambda,\mu))=-(\mu^2-10\mu+1)$. Quindi

$$\det A_{00}(\lambda,\mu)=\begin{cases} >0 \text{ se } x\in\left]\dfrac{5-2\sqrt{6}}{2},\dfrac{5+2\sqrt{6}}{2}\right[\to \textbf{ ellisse} \\ =0 \text{ se } x=\dfrac{5-2\sqrt{6}}{2} \text{ opp } x=\dfrac{5+2\sqrt{6}}{2},\to \textbf{ parabola} \\ <0 \text{ se } x\in\left]-\infty,\dfrac{5-2\sqrt{6}}{2}\right[\text{ opp } x\in\left]\dfrac{5+2\sqrt{6}}{2},+\infty\right[\to \textbf{iperbole} \end{cases}$$

Esempio 2. (1) Nel piano euclideo $\mathbb{E}^2$ determinare la conica $\mathcal{C}$ che:
- passi per $O:(0,0)$ e $P:(1,3)$;
- la polare di $P_1:(0,1)$ sia $p_1:\ y-3x=0$;
- $\mathcal{C}$ sia una parabola.

Sol. (1) Si osservi che O e P sono punti della retta p_1, per cui possiamo scrivere un fascio di coniche bitangenti in O e P[1] e poi imporremo la condizione che la conica sia una parabola. Il fascio è quindi generato dalle coniche degeneri $\mathcal{C}_1=(P_1P)(OP)$ e $\mathcal{C}_2=p_1^2$. L'equazione generale del fascio è quindi $\mathcal{F}:\ (y-2x-1)x+\lambda(y-3x)^2=0$, in cui $P_1P:\ y-2x-1=0$ e $OP_1:\ x=0$. Imponiamo ora che la conica sia una parabola, cioè che il minore A_{00} della matrice associata alla conica abbia determinante nullo, ossia $\det A_{00}=(9\lambda-2)\lambda-\frac{(1-6\lambda)^2}{4}$ e $detA_{00}=0$ se e solo se $\lambda=\frac{1}{4}$. Da cui l'equazione della parabola è $\mathcal{P}:\ x^2+y^2-3xy-4x=0$.



[1] Si ricordi che la polare di un punto ad una coniche interseca la conica in due punti che sono i punti in cui le rette condotte dal polo sono tangenti la conica.

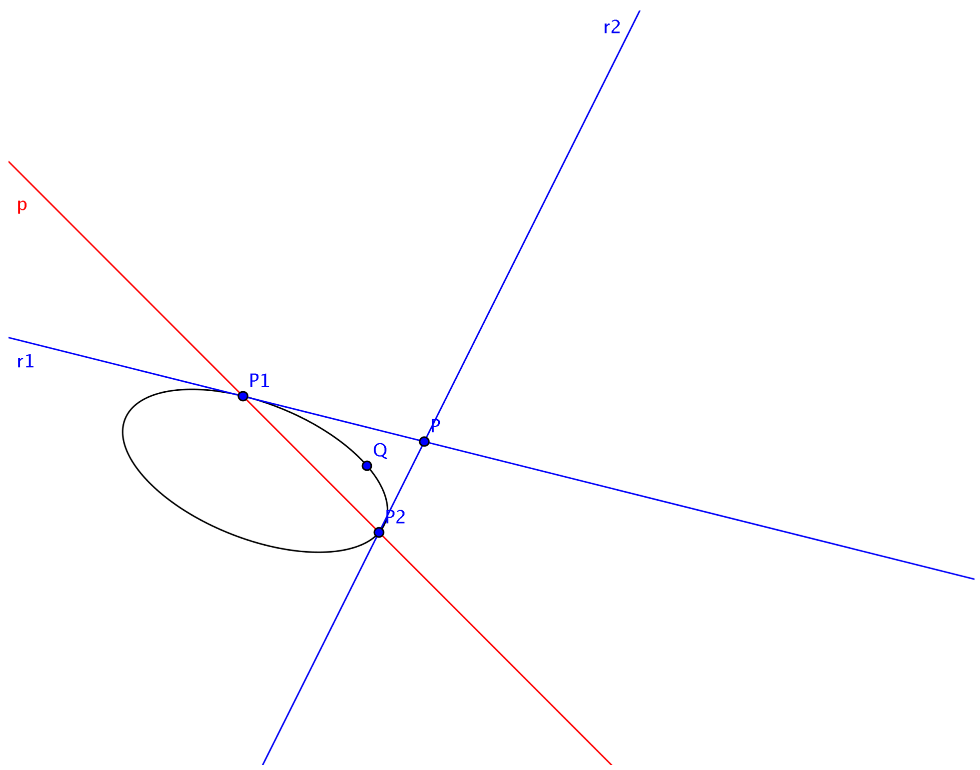
Esempio 3. Si consideri il piano affine reale $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ ampliato proiettivamente.

(1) Determinare la conica $\mathcal{C}$ tale che $P:(2,1)$ sia polo di $p: x+y=0$ e passi per $P_1:(-2,2)$, $P_2:(1,-1)$ e $Q:(1,1)$.
(2) Determinare il tipo affine di conica.
(3) Determinare il polo R' di $r' = PQ$.
(4) Determinare il polo R'' di $r'' = R'P$.
(5) Cosa si può dire del triangolo $PR'R''$?

Sol. (1) Osserviamo che i punti P_1 e P_2 appartengono alla retta p, polare del punto P, quindi scriviamo l'equazione del fascio di coniche bitangenti $\mathcal{F}: \ r_1 r_2 + \kappa p^2$ in cui $r_1 = PP_1: \ 4y+x-6=0$ e $r_2 = PP_2: \ 2x-y-3=0$, quindi

$$\mathcal{F}: \ (4y+x-6)(2x-y-3)+\kappa(x+y)^2=0$$

Imponiamo ora il passaggio per Q ottenendo $\lambda = -\frac{1}{2}$ da cui la conica cercata ha equazione



$$\mathcal{C}: \ x^2-3y^2+4xy-10x-4y+12=0$$

La matrice associata alla conica è

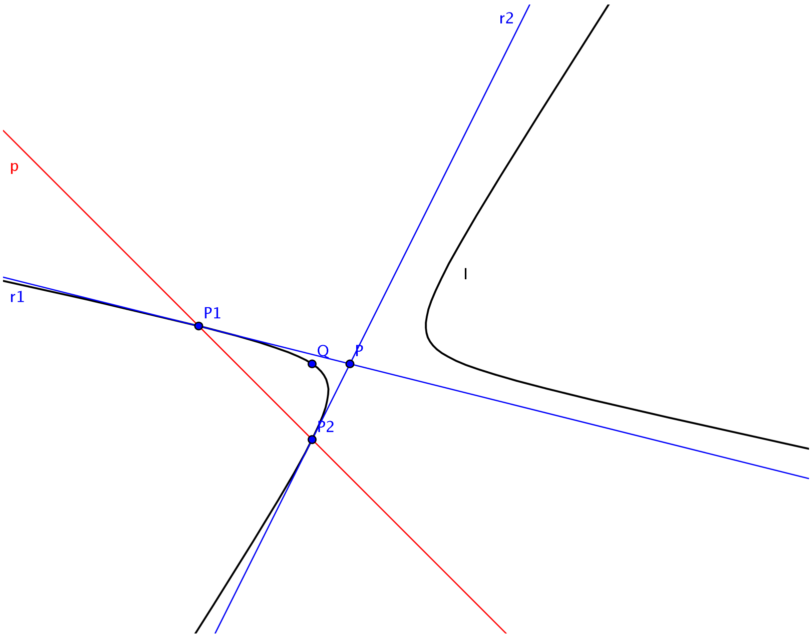
$$A = \begin{bmatrix} 12 & -5 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ -32 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

La conica $\mathcal{C}$ è quindi un'iperole dal mometo che $\det A_{00} < 0$.

(2) Per determinare di che tipo di conica si tratta scriviamo la matrice associata alla conica

$$A = \begin{bmatrix} 12 & -5 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ -32 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Quindi $\mathcal{C}$ è un'iperbole dal mometo che $\det A_{00} < 0$.



(3) Per determinare R' applichiamo il principio di reciprocità. Se τ_Q è la tangente a $\mathcal{C}$ in Q il punto R' sarà data dall'intersezione $\tau_Q \cap p$. Ora passando per lo spazio ampliato proiettivamente si ottiene $\tau_Q : \ X_Q^T AX = 2x_1 + 3x_2 - 5x_0 = 0$ o in coordinate affini $2x + 3y - 5 = 0$ e quindi $R' : \ (-5, 5)$.
(4) Analogamente al punto precedente $R'' = r' \cap p$. Ora $r' : \ y = 1$ e quindi $R'' : \ (-1, 1)$.
(5) Il triangolo $PR'R''$ è *autopolare*.

Esempio 4. (1) Determinare nel piano euclideo $\mathbb{E}^2$, in cui è fissato un sistema di riferimento cartesiano, l'equazione della conica $\mathcal{C}$ tangente alle rette $r : y = 2x + 1$ e $r' = 2x - 1$ nei punti $P_1(1, 3)$ e $P_2(-1, -3)$ e passante per il punto $P(1, 2)$.
(2) Determinare la forma canonica metrica di $\mathcal{C}$.
(3) Dopo aver verificato che la retta $d : \ y = 3x$ è un diametro di $\mathcal{C}$, se ne determini il diametro coniugato d', procedendo possibilmente per via sintetica.