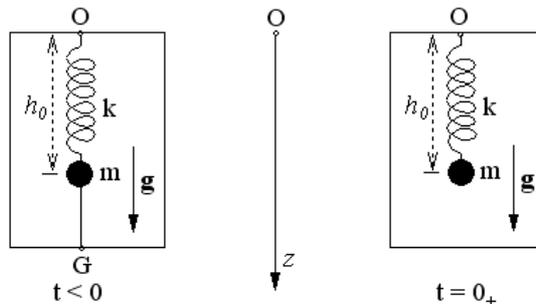


Problemi di dinamica del punto materiale (moto oscillatorio)

A – Sistemi di riferimento inerziali

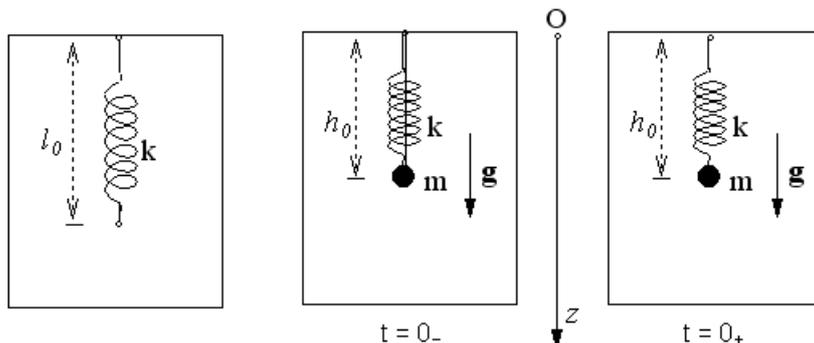
Problema n. 1: Un corpo puntiforme di massa $m = 2.5 \text{ kg}$ pende verticalmente dal soffitto di una stanza essendo attaccato all'estremità inferiore di una molla di costante elastica $k = 245 \text{ N/m}$ e di lunghezza a riposo $l_0 = 0.4 \text{ m}$, disposta verticalmente e avente l'estremità superiore vincolata ad un punto fisso O del soffitto. Il corpo viene mantenuto in quiete a una distanza $h_0 = 0.6 \text{ m}$ dal punto O mediante un filo inestensibile, privo di massa che collega il corpo di massa m ad un gancio G del pavimento. All'istante $t = 0$ il filo si spezza e il corpo inizia a muoversi di moto oscillatorio. Determinare nel sistema di riferimento Oz , con l'asse verticale z orientato verso il basso:

- la reazione \mathbf{R}_G del gancio G per $t < 0$;
- la reazione \mathbf{R}_O del vincolo in O per $t < 0$;
- l'equazione del moto del corpo per $t > 0$;
- la posizione z_{eq} di equilibrio del corpo di massa m per $t > 0$;
- la legge oraria del moto oscillatorio per $t > 0$, e la relativa rappresentazione grafica;
- la reazione $\mathbf{R}_O(t)$ del vincolo in O per $t > 0$;
- la velocità \mathbf{v} del corpo quando passa per la seconda volta dalla sua posizione di equilibrio.



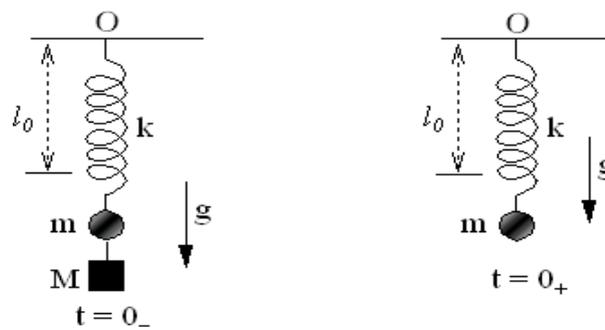
Problema n. 2: Un corpo puntiforme di massa $m = 2 \text{ kg}$ pende verticalmente dal soffitto di una stanza essendo ancorato all'estremità di una molla di costante elastica $k = 98 \text{ Nm}^{-1}$ e lunghezza a riposo $l_0 = 0.8 \text{ m}$, disposta verticalmente e avente l'estremità superiore vincolata ad un punto fisso O del soffitto stesso. Inizialmente il corpo si trova in equilibrio statico a una distanza $h_0 = 0.6 \text{ m}$ dal punto O mediante un filo inestensibile e privo di massa che pende esso stesso dal punto O . All'istante $t = 0$ il filo si spezza e il corpo inizia a muoversi di moto oscillatorio. Calcolare nel sistema di riferimento Oz , con l'asse z orientato verso il basso:

- la tensione \mathbf{T} del filo per $t < 0$;
- l'equazione del moto del corpo per $t > 0$;
- la posizione di equilibrio del corpo per $t > 0$;
- la legge oraria del moto oscillatorio per $t > 0$, in relazione alle condizioni iniziali di moto all'istante $t = 0$;
- la velocità \mathbf{v} del corpo quando passa per la seconda volta dalla sua posizione di equilibrio;
- la reazione $\mathbf{R}_O(t)$ esercitata dal vincolo in O durante il moto del corpo.



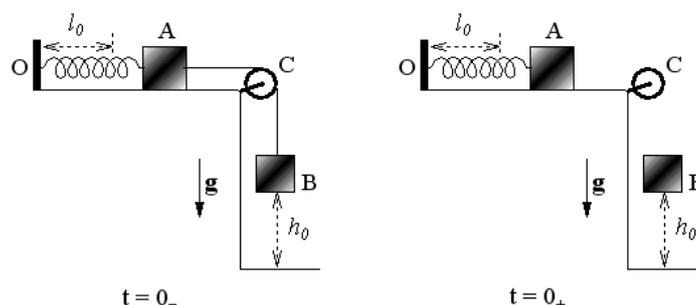
Problema n. 3: Una molla ideale di costante elastica $k = 245 \text{ N/m}$ e lunghezza a riposo $l_0 = 0.8 \text{ m}$ pende verticalmente avendo un'estremità fissata ad un punto O fisso del soffitto di una stanza, che si trova ad un'altezza $H = 5 \text{ m}$ dal suolo. Un corpo puntiforme di massa $m = 3.6 \text{ kg}$ è attaccato all'estremità libera di essa e un secondo corpo puntiforme di massa $M = 1.4$ è collegato tramite una filo ideale di lunghezza $L = 0.2$. (priva di massa e inestensibile) al corpo di massa m . Il sistema si trova inizialmente in configurazione verticale e in equilibrio con le due masse m e M in quiete. All'istante $t = 0$, la fune che collega le due masse si spezza e il corpo di massa m inizia a muoversi sotto l'azione delle forze agenti su di esso. Calcolare nel sistema di riferimento Oz ancorato al punto O indicato in figura:

- il diagramma della forze agenti sui due punti materiali;
- la tensione della fune prima della sua rottura;
- la deformazione della molla per $t < 0$;
- l'equazione del moto della massa m per $t > 0$;
- la nuova posizione di equilibrio della massa m per $t > 0$;
- la legge oraria del moto della massa m per $t > 0$, in relazione alle condizioni iniziali a $t = 0$;
- la frequenza di oscillazione della massa m ;
- il modulo della velocità di impatto al suolo della massa M , dopo la rottura della fune.



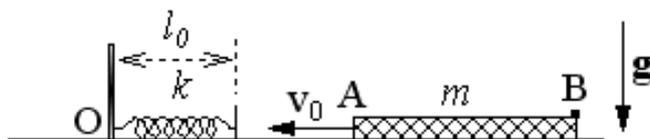
Problema n. 4: Un blocchetto A di dimensioni trascurabili e massa $M = 1 \text{ kg}$ poggia su un piano orizzontale liscio ed è ancorato all'estremità di una molla di costante elastica $k = 30 \text{ Nm}^{-1}$, disposta orizzontalmente e avente l'altra estremità impernata ad un punto fisso O. Tramite una fune ideale ed una carrucola di massa trascurabile, il blocchetto è poi collegato ad un secondo blocchetto, pure puntiforme, di massa $m = 0.5 \text{ kg}$ sospeso nel vuoto ad un'altezza $h_0 = 80 \text{ cm}$ dal suolo. Il sistema inizialmente si trova in condizione di equilibrio statico. All'istante $t = 0$ la fune improvvisamente si spezza e i due corpi si mettono in movimento. Determinare:

- il diagramma delle forze agenti sui due corpi puntiformi prima della rottura della fune;
- l'allungamento della molla Δx rispetto alla sua posizione di equilibrio quando tutto il sistema è in equilibrio statico;
- la reazione \mathbf{R}_O del perno in O prima della rottura della fune;
- il diagramma delle forze agenti sui due corpi dopo la rottura della fune;
- la reazione \mathbf{R}_O del perno in O subito dopo la rottura della fune;
- le equazioni del moto dei due corpi dopo la rottura della fune;
- le leggi orarie dei moto dei due corpi, tenendo opportunamente conto delle rispettive condizioni iniziali;
- il modulo della velocità del blocchetto A nell'istante in cui corpo B tocca il suolo.



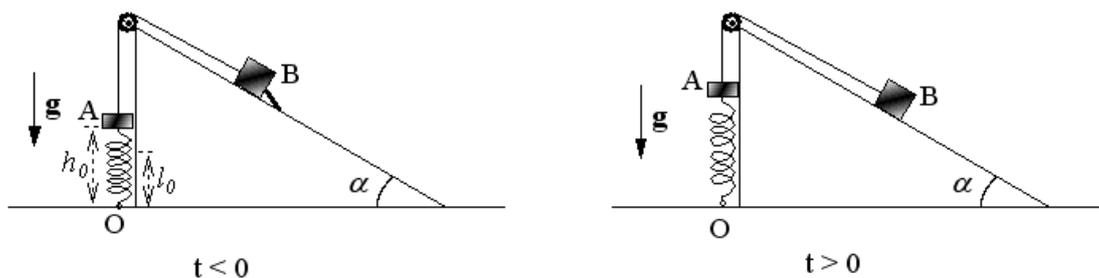
Problema n. 5: Una piattaforma AB di massa $m = 50 \text{ kg}$ si muove di moto rettilineo uniforme su un piano orizzontale liscio con velocità $v_0 = 0.6 \text{ ms}^{-1}$. Su di essa è posto nell'estremità B una particella, di massa trascurabile, in quiete rispetto alla piattaforma. Al tempo $t = 0$ l'estremità A della piattaforma urta l'estremità libera di una molla, non deformata, avente lunghezza a riposo $l_0 = 0.8 \text{ m}$ e costante elastica $k = 200 \text{ Nm}^{-1}$, disposta orizzontalmente, e con l'altra estremità ancorata al punto fisso O. Dopo l'urto la piattaforma resta agganciata alla molla, così che, dopo un certo tempo, essa si arresta per un istante, quindi inverte il verso del suo moto e ritorna indietro. Determinare:

- il diagramma delle forze agenti sulla piattaforma per $t > 0$;
- l'equazione del moto della piattaforma dopo l'aggancio con la molla;
- la sua legge oraria del moto per $t > 0$, tenendo in debito conto delle condizioni iniziali;
- lo spostamento Δr della particella, rispetto all'estremità B, all'istante $t_1 = 0.785 \text{ s}$;
- la velocità relativa \mathbf{v}_r della particella, rispetto alla piattaforma, all'istante $t_2 = 1.570 \text{ s} = 2t_1$.



Problema 6: Due corpi puntiformi A e B, rispettivamente di massa $m = 2 \text{ kg}$ e $M = 8 \text{ kg}$, sono collegati tramite un filo inestensibile, di massa trascurabile che può scorrere, senza incontrare attrito alcuno, nella gola di una carrucola anch'essa di massa trascurabile. Il corpo A è attaccato all'estremità di una molla ideale, disposta in configurazione verticale, di costante elastica $k = 98 \text{ Nm}^{-1}$ e lunghezza a riposo $l_0 = 0.4 \text{ m}$. La molla ha l'altra estremità ancorata ad un punto fisso O del piano orizzontale. Il corpo B è appoggiato sul piano perfettamente liscio di un cuneo, inclinato di un angolo $\alpha = 30^\circ$ rispetto al piano orizzontale e solidale ad esso. Inizialmente il sistema è in equilibrio con il corpo A, che pende verticalmente, fermo ad un'altezza $h_0 = 0.5 \text{ m}$ rispetto al suolo e con il corpo B mantenuto in quiete tramite un dispositivo di arresto. All'istante $t = 0$ il dispositivo di arresto viene rimosso e il sistema dei due corpi, non più in condizioni di equilibrio, inizia a muoversi. Trascurando tutti i possibili attriti, determinare:

- il diagramma delle forze agenti sui due corpi A e B per $t < 0$;
- la tensione iniziale del filo che collega i due corpi;
- la reazione del dispositivo di arresto del corpo B;
- la reazione \mathbf{R}_O sviluppata dal vincolo in O per $t < 0$;
- il diagramma delle forze agenti sui due corpi A e B per $t > 0$;
- l'equazione del moto del sistema dei due corpi per $t > 0$;
- l'allungamento della molla in corrispondenza della posizione di equilibrio del sistema;
- la frequenza di oscillazione del sistema;
- l'altezza massima e minima raggiunte durante il moto dal corpo A rispetto al piano orizzontale;
- la reazione $\mathbf{R}_O(t)$ sviluppata dal vincolo in O per $t > 0$;
- il modulo della tensione del filo che collega i due corpi A e B per $t > 0$.

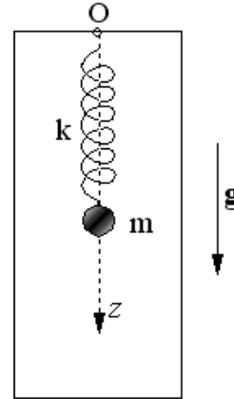


Suggerimento: Si assuma come asse di riferimento l'asse verticale Ox e orientato verso l'alto.

B – Sistemi di riferimento non-inerziali

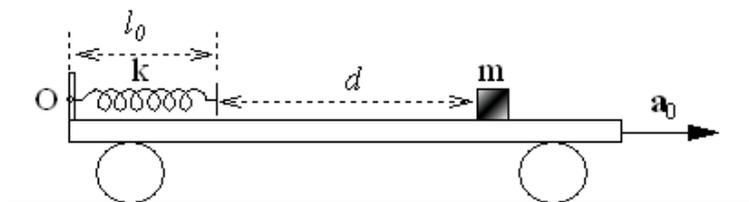
Problema n. 7: Un corpo puntiforme di massa $m = 2.5 \text{ kg}$ è attaccato all'estremità libera una molla di costante elastica $k = 98 \text{ Nm}^{-1}$ e di lunghezza a riposo $l_0 = 0.6 \text{ m}$, avente l'altra estremità fissata al punto O del soffitto della cabina di un ascensore. Inizialmente la particella, che pende verticalmente, è in equilibrio statico e la cabina dell'ascensore è pure in quiete trovandosi ad una altezza $H = 108 \text{ m}$ dal suolo. Al tempo $t = 0$ il cavo di sollevamento dell'ascensore si spezza e l'ascensore si mette in moto di caduta libera. Trascurando tutti gli attriti con l'aria, determinare nel sistema di riferimento Oz solidale all'ascensore:

- il diagramma delle forze agenti sul corpo di massa m per $t < 0$;
- la lunghezza della molla per $t < 0$;
- il digramma di tutte le forze, vere e apparenti, agenti sulla massa per $t > 0$;
- l'equazione del moto del corpo di massa m per $t > 0$;
- la legge oraria del moto del corpo puntiforme, tenendo in debita considerazione le condizioni del suo stato di moto all'istante $t = 0$;
- distanza minima dal punto O raggiunta dal corpo di massa m durante il suo moto per $t > 0$;
- la lunghezza istantanea della molla per cui la velocità del corpo è massima.



Problema n. 8: Un corpo puntiforme di massa $m = 4 \text{ kg}$ si trova in equilibrio statico sul pianale liscio di un carrello ad una distanza $d = 0.9 \text{ m}$ dall'estremità libera di una molla ideale, disposta in configurazione orizzontale e avente l'altra estremità vincolata al punto O solidale al carrello. Il carrello è a sua volta in quiete sul piano orizzontale e la molla ha costante elastica $k = 196 \text{ Nm}^{-1}$ lunghezza a riposo $l_0 = 0.5 \text{ m}$. Ad un certo istante il carrello viene messo in moto sul piano orizzontale verso destra con accelerazione di modulo costante $a_0 = 3.2 \text{ ms}^{-2}$. Assumendo come istante $t = 0$ quello di impatto fra il corpo e l'estremità libera della molla, determinare nel sistema di riferimento Oxy, solidale al carrello:

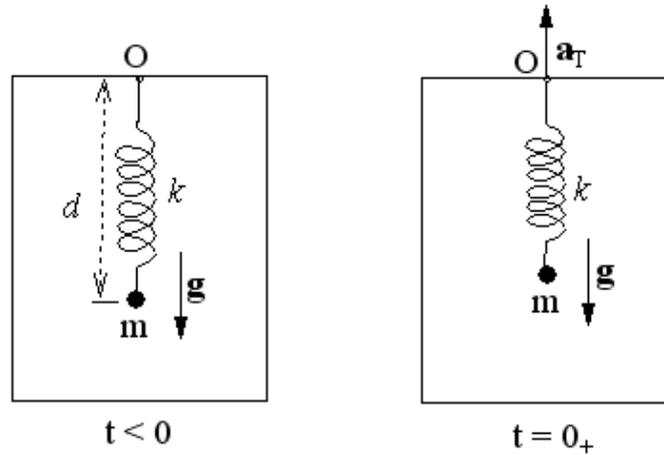
- la velocità della massa m nell'istante di impatto contro l'estremità libera della molla;
- il diagramma di tutte le forze (vere e fittizie) agenti sul corpo all'istante $t = 0_+$;
- l'equazione del moto del corpo per $t > 0$, nell'ipotesi che dopo l'urto il blocco rimanga attaccato alla molla;
- la posizione di equilibrio del corpo per $t > 0$;
- la legge oraria del moto del corpo per $t > 0$, considerando la sua posizione e velocità all'istante $t = 0$;
- la compressione massima della molla per $t > 0$.



Problema n. 9: Un corpo puntiforme di massa $m = 4 \text{ kg}$ pende verticalmente essendo attaccato all'estremità inferiore di una molla di costante elastica $k = 196 \text{ Nm}^{-1}$ e lunghezza a riposo $l_0 = 0.6 \text{ m}$, disposta verticalmente e avente l'estremità superiore ancorata al punto O del soffitto della cabina di un ascensore. Inizialmente l'ascensore è in quiete e il corpo si trova in condizioni di equilibrio statico. All'istante $t = 0$ l'ascensore viene messo in moto verso l'alto con accelerazione costante di modulo $a_T = g/2$. Calcolare:

- il diagramma delle forze agenti sul corpo, quando l'ascensore è in quiete;
- la distanza iniziale d del corpo puntiforme dal punto O di ancoraggio della molla;

- c) la reazione \mathbf{R}_O iniziale del vincolo in O;
- d) l'equazione del moto del corpo nel sistema riferimento solidale all'ascensore per $t > 0$;
- e) la legge oraria del moto del corpo in tale sistema di riferimento;
- f) la nuova posizione di equilibrio del corpo per $t > 0$;
- g) la reazione $\mathbf{R}_O(t)$ del vincolo in O per $t > 0$.



Problema n. 10: Un corpo puntiforme di massa $m = 0.5 \text{ kg}$ è ancorato al punto O del soffitto di un vagone ferroviario, tramite una filo ideale, di massa trascurabile e di lunghezza $L = 1.2 \text{ m}$ (vedi figura). Inizialmente il corpo si trova in condizione di quiete rispetto al treno, che viaggia a velocità costante di modulo $v = 30 \text{ ms}^{-1}$ su un piano orizzontale. All'istante $t = 0$ il treno frena con decelerazione costante $a_0 = 1 \text{ ms}^{-2}$ fino ad arrestarsi. Nell'ipotesi che l'attrito con l'aria sia trascurabile, determinare nel sistema di riferimento solidale al treno:

- a) il diagramma delle forze agenti, la posizione di equilibrio del corpo puntiforme e il valore della tensione della fune durante la fase di moto uniforme del treno;
- b) il diagramma di tutte le forze agenti, reali e apparenti, agenti sul corpo all'istante $t = 0_+$;
- c) l'equazione del moto del corpo puntiforme durante la fase di moto decelerato del treno;
- d) la posizione di equilibrio del corpo durante questa fase di moto del treno;
- e) la legge oraria del moto oscillatorio del corpo puntiforme durante la stessa fase;
- f) la frequenza di oscillazione del corpo;
- g) la tensione massima della fune durante il moto oscillatorio del corpo.

Suggerimento: Per indicare la posizione di equilibrio si usi l'ampiezza dell'angolo θ formato dalla fune con la verticale passante per O, e si assuma valida ovunque l'approssimazione delle piccole oscillazioni (cioè $\sin\theta = \theta$ e $\cos\theta \approx 1$).

