Foglio 6

13 novembre 2014

Esercizio 1 (Punti 6)**.** Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $v \longmapsto Av$, dove A è la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Si trovino l'immagine $Im(f)$ e lo spazio nullo $N(f)$ di f, e per ciascuno dei due sottospazi si trovi una base.
2. Si trovi un sottospazio T di $\mathbb{R}^4$ tale che $\mathbb{R}^4 = T \oplus N(f)$.
3. Si trovi un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathbb{R}^3 = W \oplus Im(f)$

Esercizio 2 (Punti 6)**.**

1. Esiste una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(0,1)^T = (2,4)^T$ e $f(0,2)^T = (1,3)^T$? È unica?
2. Esiste una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(0,1)^T = (2,4)^T$ e $f(1,1)^T = (1,5)^T$? È unica? In caso affermativo trovare lo spazio nullo e l'immagine di f.
3. Esiste una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(0,1,1)^T = (2,4)^T$ e $f(1,0,1)^T = (1,5)^T$? È unica?

Esercizio 3 (Punti 6)**.** Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - \alpha x_4 = 8 \end{cases}$$

1. si scriva il sistema nella forma matriciale $A_\alpha x = b_\alpha$ e si trovi lo spazio nullo $N(A_\alpha)$.
2. si verifichi che $(\ 3-\alpha,\ 0, 2+\alpha,\ -1)^T$ è una soluzione del sistema $A_\alpha x = b_\alpha$
3. Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si trovino tutte le soluzioni del sistema $A_\alpha x = b_\alpha$
4. Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si trovino le soluzioni del sistema $A_\alpha x = c_\alpha$, dove $c_\alpha = A_\alpha(2-i,\ \alpha^3,\ \sqrt{2}, -1+i)^T$

Esercizio 4 (Punti 6)**.** Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ definita da $T(x,y,z) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ z-y & -x \end{bmatrix}$.

1. Determinare una base dello spazio nullo e dell'immagine di T.
2. Data la matrice $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, trovare tutti gli elementi $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $T(v) = B$. La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ appartiene all'immagine di T?

Esercizio 5 (Punti 6)**.** Data una matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$, si dimostri che

1. A possiede un'inversa destra se e solo se l'applicazione lineare $f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m, x \mapsto Ax$ è suriettiva
2. A possiede un'inversa sinistra se e solo se l'applicazione lineare $f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m, x \mapsto Ax$ è iniettiva.