

Sistemi - Modulo di Sistemi a Eventi Discreti

Laurea Magistrale in Ingegneria e Scienze Informatiche
Tiziano Villa

24 Febbraio 2012

Nome e Cognome:

Matricola:

Posta elettronica:

problema	punti massimi	i tuoi punti
problema 1	8	
problema 2	10	
problema 3	12	
totale	30	

1. (a) Scrivete la definizione di relazione di simulazione tra una macchina a stati finiti nondeterministica M_A (simulata) e una macchina a stati finiti nondeterministica M_B (simulante).

Traccia di soluzione.

Si vedano le dispense.

(b) Vi si dice che c'è una macchina a stati finiti M_A con

- stati: $\{a, b, c, d\}$ con a stato iniziale;
- una variabile d'ingresso $X = \{1, 2, assente\}$,
- una variabile d'uscita $Y = \{1, 2, assente\}$;

e nient'altro.

C'è abbastanza informazione per costruire una macchina a stati finiti M_B che simula M_A ? Se no, argomentate il perché; se sì, costruite tale macchina a stati e scrivete la relazione di simulazione.

Traccia di simulazione.

Sì, possiamo definire tale macchina M_B : essa ha un solo stato s con auto-anelli etichettati con:

$\{1, 2, assente\}/1$, $\{1, 2, assente\}/2$ e $\{1, 2, assente\}/assente$,

in altri termini si tratta della macchina che per ogni ingresso può produrre qualsiasi uscita (definita macchina caotica in certa letteratura).

La relazione di simulazione è:

$$S = \{(a, s), (b, s), (c, s), (d, s)\}$$

2. Una rete di Petri marcata e' specificata da una quintupla: $\{P, T, A, w, x\}$, dove P sono i posti, T le transizioni, A gli archi, w la funzione di peso sugli archi, e x il vettore di marcamento (numero di gettoni per posto). $I(t_i)$ indica l'insieme dei posti in ingresso alla transizione t_i , $O(t_j)$ indica l'insieme dei posti in uscita dalla transizione t_j .

Si consideri la rete di Petri P_{acicl} definita da:

- $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$
- $T = \{t_1, t_2, t_3\}$
- $A = \{(p_1, t_1), (p_2, t_2), (p_3, t_2), (p_5, t_3), (t_1, p_2), (t_1, p_3), (t_2, p_4), (t_3, p_4)\}$
- $\forall i, j \ w(p_i, t_j) = 1$, tranne che $w(p_2, t_2) = 2$
- $\forall i, j \ w(t_i, p_j) = 1$

Sia $x_0 = [3, 1, 0, 0, 0]$ la marcatura iniziale.

- (a) Si disegni il grafo della rete di Petri P_{acicl} .

- (b) Una rete di Petri in cui non ci sono cicli chiusi (circuiti diretti) si dice aciclica. Per reti di Petri acicliche, affinché uno stato x sia raggiungibile da uno stato x_0 è necessario e sufficiente che esista una soluzione z per interi non-negativi dell'equazione $x = x_0 + zA$, dove A è la matrice d'incidenza.

Si usi tale risultato per dimostrare che lo stato $x = [0, 0, 1, 2, 0]$ è raggiungibile dallo stato x_0 .

Traccia di soluzione.

Gli elementi della matrice A sono definiti come

$$a_{j,i} = w(t_j, p_i) - w(p_i, t_j)$$

da cui

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Il sistema si riduce a

$$\begin{aligned} 3 - z_1 &= 0 \\ 1 + z_1 - 2z_2 &= 0 \\ z_1 - z_2 &= 1 \\ z_2 + z_3 &= 2 \\ -z_3 &= 0 \end{aligned}$$

Esiste una soluzione per interi non-negativi $z = [3, 2, 0]$.

- (c) Qual è l'interpretazione del vettore z ?

Traccia di soluzione.

La componente i -esima del vettore z denota il numero di volte che la transizione t_i deve scattare per passare dallo stato x_0 allo stato x .

Ad esempio, si può raggiungere x a partire da x_0 facendo scattare prima t_1 tre volte e poi t_2 due volte.

- (d) Per giustificare che l'esistenza di una soluzione z per interi non-negativi implica la raggiungibilit , qualcuno vi propone la seguente traccia di ragionamento.

Sia N_z la sottorete della rete di Petri aciclica costituita dalle transizioni t_i tali che $z_i > 0$ e dai loro posti d'ingresso e uscita insieme con i loro archi di connessione. Sia x_{0z} il sottovettore di x_0 ristretto ai posti in N_z . La sottorete (N_z, x_{0z})   aciclica. Si puo' dimostrare che in tale sottorete aciclica deve esserci almeno una transizione t_i che puo' scattare a partire da x_{0z} . Facendo scattare t_i , si ottengano la marcatura risultante $x' = x_0 + uA$ e il vettore $z' = z - u$, dove u ha tutte le componenti nulle tranne $u_i = 1$. Allora $x = x' + z'A$, $z' \geq 0$, e la sottorete $(N_{z'}, x'_{z'})$   aciclica. Si ripeta il procedimento finche z' si riduce al vettore nullo.

Applicate la costruzione proposta al problema di raggiungibilit  dei punti precedenti sino ad ottenere il vettore z' nullo, mostrando tutti i passi del procedimento.

Traccia di soluzione.

Nella traccia si   usata la matrice d'incidenza A della rete intera, in alternativa si poteva usare la matrice d'incidenza A_{N_z} della sottorete N_z costituita dalle transizioni t_1, t_2 e dai relativi posti ed archi:

$$A_{N_z} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si   scelto l'ordine di scatto $(t_1, t_2, t_1, t_1, t_2)$ (altri ordini di scatto sono $(t_1, t_1, t_1, t_2, t_2)$, $(t_1, t_1, t_2, t_1, t_2)$).

Facendo scattare la transizione t_1 , si ottiene la marcatura risultante $x' = x_0 + uA$, cioe' $[2, 2, 1, 0, 0] = [3, 1, 0, 0, 0] + [1, 0, 0]A$, e inoltre $z' = z - u$, cioe' $[2, 2, 0] = [3, 2, 0] - [1, 0, 0]$. Da cui $x = x' + z'A$, cioe' $[0, 0, 1, 2, 0] = [2, 2, 1, 0, 0] + [2, 2, 0]A$.

Facendo scattare la transizione t_2 , si ottiene la marcatura risultante $x' = x_0 + uA$, cioe' $[2, 0, 0, 1, 0] = [2, 2, 1, 0, 0] + [0, 1, 0]A$, e inoltre $z' = z - u$, cioe' $[2, 1, 0] = [2, 2, 0] - [0, 1, 0]$. Da cui $x = x' + z'A$, cioe' $[0, 0, 1, 2, 0] = [2, 0, 0, 1, 0] + [2, 1, 0]A$.

Facendo scattare la transizione t_1 , si ottiene la marcatura risultante $x' = x_0 + uA$, cioe' $[1, 1, 1, 1, 0] = [2, 0, 0, 1, 0] + [1, 0, 0]A$, e inoltre $z' = z - u$, cioe' $[1, 1, 0] = [2, 1, 0] - [1, 0, 0]$. Da cui $x = x' + z'A$, cioe' $[0, 0, 1, 2, 0] = [1, 1, 1, 1, 0] + [1, 1, 0]A$.

Facendo scattare la transizione t_1 , si ottiene la marcatura risultante $x' = x_0 + uA$, cioè' $[0, 2, 2, 1, 0] = [1, 1, 1, 1, 0] + [1, 0, 0]A$, e inoltre $z' = z - u$, cioè' $[0, 1, 0] = [1, 1, 0] - [1, 0, 0]$. Da cui $x = x' + z'A$, cioè' $[0, 0, 1, 2, 0] = [0, 2, 2, 1, 0] + [0, 1, 0]A$.

Facendo scattare la transizione t_2 , si ottiene la marcatura risultante $x' = x_0 + uA$, cioè' $[0, 0, 1, 2, 0] = [0, 2, 2, 1, 0] + [0, 1, 0]A$, e inoltre $z' = z - u$, cioè' $[0, 0, 0] = [0, 1, 0] - [0, 1, 0]$, con cui si conclude il procedimento.

3. Si consideri il seguente automa temporizzato di un parchimetro con una variabile discreta d'ingresso $u(t)$, una variabile di stato $s(t)$ (orologio) e una variabile discreta d'uscita $v(t)$:

- locazioni: l_1, l_2 , con l_1 locazione iniziale, con condizione iniziale $s(0) := 0$;
- dinamica della locazione l_1 : $\dot{s}(t) = 0, v(t) = \text{assente}$,
invariante della locazione l_1 : *vero*,
dinamica della locazione l_2 : $\dot{s}(t) = -1, v(t) = \text{assente}$,
invariante della locazione l_2 : *vero*;
- transizione da l_1 a l_2 : $m5/v(t) = \text{assente}, s(t) := 5$,
transizione da l_1 a l_2 : $m25/v(t) = \text{assente}, s(t) := 25$,
transizione da l_2 a l_2 : $m5/v(t) = \text{assente}, s(t) := \min(s(t) + 5, 30)$,
transizione da l_2 a l_2 : $m25/v(t) = \text{assente}, s(t) := \min(s(t) + 25, 30)$,
transizione da l_2 a l_1 : $\text{fuoritempo}/v(t) = \text{scaduto}, s(t) := s(t)$,
dove $m5 = \{(u(t), s(t)) \mid u(t) = 5\text{cent}\}$,
 $m25 = \{(u(t), s(t)) \mid u(t) = 25\text{cent}\}$,
 $\text{fuoritempo} = \{(u(t), s(t)) \mid u(t) = \text{assente} \wedge s(t) = 0\}$
(la sintassi delle annotazioni di una transizione e' *guardia/uscita, azione*),
dove in questo caso *uscita* si riferisce al valore assunto dalla variabile discreta $v(t)$ e *azione* al riassegnamento della variabile di stato $s(t)$;
- ingresso $u(t) \in \{5\text{cent}, 25\text{cent}, \text{assente}\}$;
- uscita $v(t) \in \{\text{scaduto}, \text{assente}\}$.

- (a) Si disegni il diagramma di transizione degli stati dell'automa, annotando con precisione locazioni e transizioni.

Traccia di soluzione.

Il diagramma dell'automa ibrido e' identico a quello della Fig. 6.6 del Cap. 6 di Lee-Varaiya, con la durata 60 sostituita dalla durata 30.

(b) Si spieghi il funzionamento del parchimetro.

Qual e' il significato delle locazioni l_1 e l_2 ?

Traccia di soluzione.

Si veda il commento nell'Esempio 6.6 del Cap. 6 di Lee-Varaiya. La locazione l_1 rappresenta il tempo scaduto e la locazione l_2 rappresenta quello non scaduto (l'importo del parchimetro e' ancora positivo).

- (c) Si traccino le traiettorie degli stati (inclusivi di locazione e variabile di stato) e della variabile discreta d'uscita dal tempo 0 al tempo 35 nel caso in cui si hanno gli eventi $5cent$ al tempo 0, $25cent$ al tempo 3, e nessun altro evento per le prossime 32 unita' di tempo.

N.B. Si supponga che le transizioni siano urgenti, cioe' siano effettuate non appena sono abilitate.

Traccia di soluzione.

Si allega una figura con i grafici della locazione, variabile discreta d'uscita $v(t)$ e variabile di stato $s(t)$ in risposta alla variabile discreta d'ingresso $u(t)$. Soluzione di Matteo Cuccato.

- (d) Supponiamo che il parchimetro scada proprio nell'istante in cui arriva una nuova moneta, che cosa succederà': il parchimetro scadrà' o l'importo della moneta sarà registrato aumentando il tempo a disposizione ? Si motivi la risposta.

Traccia di soluzione.

Poiché la guardia richiede $u(t) = assente$, se il parchimetro sta per scadere proprio nell'istante in cui arriva una nuova moneta, l'importo di tale moneta sarà registrato e il parchimetro non scadrà'.

- (e) Si consideri il sistema descritto dall'automa temporizzato come un sistema a eventi discreti con alfabeto d'ingresso discreto $\{5cent, 25cent, assente\}$ e alfabeto d'uscita discreto $\{scaduto, assente\}$. In base al suo funzionamento visto dall'esterno, e' possibile interpretare il sistema come il comportamento di una macchina a stati finiti ?

Traccia di soluzione.

No, tale comportamento non puo' essere riprodotto da una macchina a stati finiti.

I simboli in ingresso alla macchina sono tratti dall'alfabeto $\{5cent, 25cent, assente\}$; ogni reazione della macchina deve essere la risposta a uno di tali simboli. Se si e' presentato l'ingresso *assente*, allora la macchina deve rimanere nella stesso stato e produrre l'uscita *assente*. Gli altri due ingressi possibili sono *5cent* e *25cent*, nessuno dei quali puo' produrre l'uscita *scaduto* al parchimetro, percio' una macchina a stati finiti con questi simboli in ingresso e uscita non potrebbe mai produrre il simbolo di uscita *scaduto*.