

Sistemi - Modulo di Sistemi a Eventi Discreti

Laurea Magistrale in Ingegneria e Scienze Informatiche
Tiziano Villa

10 Febbraio 2014

Nome e Cognome:

Matricola:

Posta elettronica:

problema	punti massimi	i tuoi punti
problema 1	18	
problema 2	12	
totale	30	

1. Si consideri un impianto G con $\Sigma = \{a, b\}$, $\Sigma_{uc} = \{a\}$.

Il linguaggio $L(G)$ prodotto dall'impianto non controllato sia

$$L(G) = a^*b^*.$$

Il linguaggio generato desiderato K sia

$$K = \{a^n b^m : n \geq m \geq 0\}.$$

- (a) I linguaggi $L(G)$ e K sono regolari ? In caso affermativo, si mostri il relativo automa accettante.

Traccia di soluzione.

Il linguaggio $L(G)$ e' regolare, mentre K non lo e' (dovrebbe contare senza limiti).

(b) Il linguaggio K e' controllabile ? Si enunci la definizione di controllabilita' di un linguaggio e la si applichi a questo esempio.

Se K e' controllabile si definisca una strategia di controllo.

Traccia di soluzione.

Definizione Siano K e $M = \overline{M}$ linguaggi sull'alfabeto di eventi E , con $E_{uc} \subseteq E$. Si dice che K e' controllabile rispetto a M e E_{uc} , se per tutte le stringhe $s \in \overline{K}$ e per tutti gli eventi $\sigma \in E_{uc}$ si ha

$$s\sigma \in M \Rightarrow s\sigma \in \overline{K}.$$

[equivalente a $\overline{K}E_{uc} \cap M \subseteq \overline{K}$]

Per la definizione di controllabilita', si ha che K e' controllabile se e solo se \overline{K} e' controllabile.

Si applichi la definizione di controllabilita' al nostro esempio dove $M = L(G)$.

K e' controllabile.

La strategia di controllo e' la seguente: all'inizio il controllore disabilita b , poi lo riabilita e lo mantiene abilitato fino a che l'impianto dopo aver prodotto degli eventi a produce un numero di eventi b minore del numero degli eventi a ; quando il numero degli eventi b prodotti dall'impianto e' uguale a quello degli eventi a il controllore disabilita b .

Il fatto che la specifica sia controllabile e' indipendente dal fatto che sia realizzabile mediante un automa a stati finiti. In questo caso esiste una strategia di controllo, ma non esiste un automa a stati finiti che la realizzi (non esiste perche' tale automa dovrebbe contare il numeri di eventi a - senza un limite prestabilito - per decidere di disabilitare b quando il numero di eventi b e' pari a quello degli eventi a).

- (c) Una rete di Petri marcata e' specificata da una quintupla: $\{P, T, A, w, x\}$, dove P sono i posti, T le transizioni, A gli archi, w la funzione di peso sugli archi, e x il vettore di marcamento (numero di gettoni per posto). $I(t_i)$ indica l'insieme dei posti in ingresso alla transizione t_i , $O(t_j)$ indica l'insieme dei posti in uscita dalla transizione t_j .

Per associare un linguaggio a una rete di Petri s'introduce un insieme di eventi E , una funzione che etichetta le transizioni con eventi $l : T \rightarrow E$, e un insieme di stati marcati $X_m \subseteq N^n$ (n e' il numero di posti). Come per gli automi a stati finiti, si puo' associare a una rete di Petri sia il linguaggio generato che il linguaggio marcato.

Si consideri la rete di Petri P_{clf414} definita da:

- $P = \{p_1, p_2, p_3\}$
- $T = \{t_1, t_2, t_3\}$
- $A = \{(p_1, t_1), (p_1, t_2), (p_2, t_3), (p_3, t_2), (p_3, t_3), (t_1, p_1), (t_1, p_3), (t_2, p_2), (t_3, p_2)\}$
- $\forall i, j \ w(p_i, t_j) = 1$
- $\forall i, j \ w(t_i, p_j) = 1$
- $l(t_1) = a, l(t_2) = b, l(t_3) = b$ (dove $E = \{a, b\}$)

Sia $x_0 = [1, 0, 0]$ la marcatura iniziale.

- i. Si disegni il grafo della rete di Petri P_{clf414} .

ii. Si determini il linguaggio generato dalla rete di Petri.

Che cosa si puo' dire di questa rete di Petri rispetto al problema di controllo supervisore posto nella prima parte della domanda ?

Traccia di soluzione.

$$\mathcal{L}(P) = \{a^n b^m : n \geq m \geq 0\}.$$

Il meccanismo e' il seguente.

t_1 puo' scattare un numero arbitrario n di volte, accumulando gettoni in p_3 (corrisponde a a^n); quando si fa scattare t_2 (t_3 non puo' scattare prima di t_2) si disabilitano gli scatti di t_1 perche' p_1 risulta vuoto. Da allora si puo' fare scattare solo p_3 (t_2 puo' scattare solo la prima volta perche' svuota p_1) consumando i gettoni accumulati in p_3 (corrisponde a $a^n b^m, n \geq m \geq 0$).

Nella prima parte del problema si e' definito un problema di controllo supervisore la cui specifica K e' controllabile, ma il cui supervisore non e' regolare (cioe' non e' realizzabile con un automa a stati finiti). Tale supervisore S puo' essere rappresentato dalla precedente rete di Petri, come segue, per $s \in \mathcal{L}(G)$ e $x = f(x_0, s)$ (f e' la funzione di transizione della rete di Petri):

$$S(s) = \begin{cases} \{a, b\} & \text{if } x(p_3) > 0 \\ \{a\} & \text{if } x(p_3) = 0 \end{cases}$$

Ma l'affermazione "Tale supervisore S puo' essere rappresentato dalla precedente rete di Petri" non significa che esso possa essere realizzato in modo finito, perche' anche se si puo' rappresentare finitariamente la rete di Petri e la regola di S , per realizzare il comportamento nel tempo di tale rete (necessario ad applicare la regola di S) dovremmo poter rappresentare il numero di gettoni in p_3 che non e' limitato a priori da una costante finita.

2. Si consideri il seguente grafo delle transizioni dei segnali (STG, Signal Transition Graph, nella letteratura in inglese):

- $V = \{v_1(a+), v_2(b+), v_3(c+), v_4(a-), v_5(b-), v_6(c-)\}$, insieme dei vertici, dove accanto a ogni vertice e' indicata tra parentesi la transizione di segnale corrispondente;
- $E = \{(v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_6), (v_5, v_6), (v_6, v_1), (v_6, v_2)\}$, insieme degli archi;
- gli archi (v_6, v_1) e (v_6, v_2) hanno ciascuno un gettone.

(a) Si spieghi che cos'e' un grafo delle transizioni dei segnali e la sua interpretazione come rete di Petri.

Traccia di soluzione.

Un GTS - grafo di transizione dei segnali (STG - signal transition graph, in inglese) e' un modello formale per diagrammi temporali (che riportano le relazioni di causalita' tra i cambiamenti di livello di forme d'onda). Piu' formalmente, e' una rete di Petri interpretata dove le transizioni sono rappresentate direttamente dalle loro etichette (transizioni di segnali), e si omettono i posti (tutti i posti hanno una sola transizione in ingresso e una sola transizione in uscita - Grafo Marcato, MG - Marked Graph). I gettoni indicano lo stato iniziale del sistema.

(b) Si disegni il grafo delle transizioni dei segnali e la rete di Petri corrispondente.

Traccia di soluzione.

Si puo' rappresentare un grafo di transizione dei segnali (disegnando le transizioni come sbarrette e i posti come cerchietti), o nella sua forma semplificata (le transizioni sono rappresentate direttamente dalle etichette e si omettono i posti dato che hanno un'unica transizione in ingresso e in uscita). Qui si chiede di disegnare entrambe le rappresentazioni.

Vedi foglio allegato.

(c) Si disegni il grafo di raggiungibilit  di tale rete di Petri.

Traccia di soluzione.

Il grafo di raggiungibilit  GR (RG - reachability graph) di una rete di Petri   un sistema di transizione ST (TS - transition system) i cui stati sono gli stati raggiungibili della rete e gli eventi sono le transizioni della rete.

Vedi foglio allegato.

- (d) Codificando il grafo di raggiungibilit  si ottenga il grafo degli stati, e lo si disegni.

Traccia di soluzione.

Si puo' dire che il grafo degli stati GS (SG - state graph) e' l'interpretazione binaria del sistema di transizione che rappresenta il grafo di raggiungibilit . Ogni nodo e' etichettato con un vettore binario che riporta il valore binario di ogni segnale, e gli eventi rappresentano transizioni di segnali.

Vedi foglio allegato.

- (e) Si enuncino le proprieta' di codifica unica e di codifica completa. Si verifichi se il grafo ottenuto le soddisfa.

Traccia di soluzione.

Codifica Consistente: per ogni transizione tra due stati del grafo degli stati, i due vettori binari degli stati differiscono solo per il cambio di valore del segnale che etichetta la transizione.

Codifica Unica: a ogni stato del grafo degli stati e' assegnato un codice binario unico.

E' sufficiente per derivare senza ambiguit  le funzioni di stato futuro. Non e' una condizione necessaria perche' alcuni stati nel grafo degli stati possono essere equivalenti, oppure l'ambiguit  puo' riguardare i segnali d'ingresso (che non devono essere sintetizzati, ma e' compito dell'ambiente produrre correttamente).

Codifica Completa: se due stati del grafo degli stati hanno lo stesso codice binario, essi hanno gli stessi segnali d'uscita abilitati.

Intuitivamente, la codifica completa indica che il sistema ha abbastanza memoria per ricordarsi in che stato e' (e quindi che le funzioni di stato futuro sono deterministiche e percio' realizzabili). In particolare, se la codifica e' unica, essa e' completa.

Le proprieta' precedenti servono per garantire la realizzabilit  di un circuito (assumendo ovviamente anche la proprieta' della limitatezza).

Limitatezza: il grafo degli stati ha un numero finito di stati, cioe' la rete di Petri originale ha un insieme di raggiungibilit  finito.

Il grafo ottenuto soddisfa la proprieta' di Codifica Unica (e quindi di Codifica Completa).

- (f) Si sintetizzi il segnale di uscita c in funzione dei segnali d'ingresso a e b , minimizzandone la funzione logica. Se ne mostri la realizzazione con porte logiche.

Si commenti il circuito ottenuto.

Traccia di soluzione.

Calcolando le regioni di eccitazione $ER(c+)$, $ER(c-)$ (c cambia di livello) e di quiescenza $QR(c+)$, $QR(c-)$ (c non cambia di livello) del segnale c , si determina la funzione di stato futuro e la si minimizza (ad esempio con una mappa di Karnaugh).

$$ER(c+) = \{110\}, ER(c-) = \{001\}, QR(c+) = \{111, 011, 101\}, \\ QR(c-) = \{000, 100, 010\}.$$

Il circuito ottenuto realizza l'elemento C, una primitiva fondamentale nella sintesi di circuiti asincroni proposta da Muller nel 1959. Se entrambi gl'ingressi vanno su, dopo anche l'uscita va su; l'uscita va giu' dopo che entrambi gl'ingressi sono andati giu'.

Vedi foglio allegato.

Nota finale.

Una realizzazione corretta delle uscite richiede che si abbiano transizioni sulle uscite se e solo se l'ambiente ne e' in attesa; transizioni non attese, o il non generare transizioni attese possono produrre malfunzionamenti.

Per garantire che il circuito sia indipendente dalla velocita' (speed independent), cioe' che la sua correttezza non dipenda dai ritardi effettivi delle componenti, s'impone la condizione di persistenza delle uscite: se c'e' una coppia di segnali di cui l'uno disabilita l'altro, entrambi devono essere segnali d'ingresso.

Vale il teorema: *Un grafo di transizione dei segnali (GTS, STG) e' realizzabile come un circuito indipendente dalle velocita' se e solo se il grafo degli stati (GS, SG) e' finito, consistente, persistente rispetto alle uscite e soddisfa la proprieta' di codifica completa.*

Inoltre per garantire che il circuito sintetizzato sia indipendente dalla velocita' l'ipotesi di porte complesse atomiche richiede che tutti i ritardi interni ad ogni porta siano trascurabili e non producano alcun comportamento spurio osservabile esternamente. Le porte complesse sono astrazioni di realizzazioni fisiche e dipendono dalle tecnologie disponibili. A volte si allude a questo fatto disegnando le porte logiche come tutte

”appiccicate” senza fili interni, per significare che si vorrebbe una realizzazione a porte complesse senza ritardi interni. Tale problematica esula dal nostro corso.