Foglio di esercizi su decomposizione LU e spazi vettoriali

Sansonetto Nicola*

Esercizio 1 (Punti 8)**.** Determinare la decomposizione LU o $P^{-1}LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2 (Punti 5)**.** Dimostrare che l'insieme V delle funzioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, munito dell'usuale somma tra funzioni e dell'usuale prodotto tra funzioni e numeri reali è dotato della struttura di $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

Esercizio 3 (Punti 4+3+4)**.**

1. Dire se l'insieme $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, in cui

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

   è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$, come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

2. Estrarre da essi una base di $\mathbb{R}^3$.

3. Considerare la matrice B che ha per colonne i vettori della base di cui al punto precedente. B è invertibile? (Giustificare la risposta). In caso affermativo determinare l'inversa.

Esercizio 4 (Punti 6)**.** ☻ Si consideri l'insieme $V := \mathbb{R}_{\geq} \setminus \{0\}$ dotato dell'operazione tra vettori

$$\begin{aligned} \star : \quad V \times V &\longrightarrow \quad V \\ (v, w) &\longmapsto \quad v \cdot w \end{aligned}$$

in cui $\cdot$ denota l'usuale prodotto di $\mathbb{R}$; e dell'operazione tra scalari e vettori

$$\begin{aligned} \diamond : \quad \mathbb{R} \times V &\longrightarrow \quad V \\ (\alpha, v) &\longmapsto \quad v^{\alpha} \end{aligned}$$

Dimostrare che V dotato delle operazioni $\star$ e $\diamond$ ha la struttura di $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

N.B.
Il simbolo ☻ denota esercizi giudicati **difficile**.

*e-mail: nicola.sansonetto@gmail.com