



CORSO DI FISICA I - MODULO DI LABORATORIO

---

# IL PENDOLO SEMPLICE

---

## Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Materiale a disposizione</b>	<b>1</b>
<b>3</b>	<b>Misura del periodo d'oscillazione <math>\tau</math></b>	<b>2</b>
3.1	Layout sperimentale . . . . .	2
3.2	Caratterizzazione del sistema . . . . .	2
3.3	Misura del periodo d'oscillazione . . . . .	3
3.4	Discussione dei dati . . . . .	3
<b>4</b>	<b>Smorzamento delle oscillazioni</b>	<b>5</b>
<b>5</b>	<b>Dipendenza del periodo dalla lunghezza, ampiezza e massa</b>	<b>5</b>
5.1	Periodo d'oscillazione del pendolo . . . . .	5
5.2	Dipendenza del periodo dalla lunghezza . . . . .	6
5.3	Dipendenza del periodo dall'ampiezza . . . . .	7
5.4	Dipendenza del periodo dalla massa . . . . .	8
<b>6</b>	<b>Misurazione dell'accelerazione di gravità</b>	<b>8</b>
<b>A</b>	<b>Cifre significative, arrotondamenti ed incertezza di misura</b>	<b>10</b>
<b>B</b>	<b>Grafici e istogrammi</b>	<b>11</b>
<b>C</b>	<b>Propagazione degli errori</b>	<b>11</b>

# 1 Introduzione

Un pendolo è un qualsiasi oggetto in grado di oscillare intorno ad un punto di sospensione fisso. L'intervallo di tempo impiegato per compiere un'intera oscillazione è detto *periodo* e sarà indicato con  $\tau$ .

Si parla di *pendolo semplice* quando:

- la massa del corpo oscillante è concentrata in un volume di dimensioni trascurabili rispetto alla distanza dal punto di sospensione (approssimazione di punto materiale);
- il corpo oscillante è collegato al punto di sospensione mediante un filo inestensibile di massa trascurabile.

Il periodo di oscillazione di un pendolo semplice dipende dalla lunghezza del filo di sospensione e dall'ampiezza dell'oscillazione. Per piccole oscillazioni però, quest'ultima dipendenza è trascurabile. Questo fatto, detto *isocronismo delle piccole oscillazioni*, è stato osservato da Galileo Galilei nel 1592 misurando con i battiti cardiaci il periodo d'oscillazione di un lampadario del Duomo di Pisa. Questa proprietà ha permesso di usare il pendolo come strumento per la misurazione del tempo.

L'isocronismo delle piccole oscillazioni sarà sfruttato per avere a disposizione una grandezza fisica costante nel tempo, appunto il periodo  $\tau$ . Misurando più volte la stessa grandezza fisica si otterranno risultati di volta in volta diversi in maniera imprevedibile. Questo è l'effetto delle fluttuazioni casuali, dette anche errori casuali. Gli errori casuali danno origine ad una distribuzione di valori di misura, descrivibile mediante un istogramma oppure, in modo più sintetico seppure meno completo, mediante due parametri statistici: media e scarto quadratico medio.

La forma dell'istogramma ed i valori di media e scarto quadratico medio di un insieme di misure hanno carattere aleatorio. Si osserva che, al crescere del numero  $N$  di misure, la forma dell'istogramma tende a stabilizzarsi, così come tendono a ridursi le fluttuazioni di media e scarto quadratico medio. Queste osservazioni portano al concetto di distribuzione limite, con forma tipicamente a campana, descrivibile analiticamente con la funzione normale di Gauss.

La misura effettuata sarà quindi affetta da un'incertezza dovuta ad errori casuali che dovrà essere confrontata con l'incertezza dovuta alla risoluzione. Attenzione particolare sarà da porre nell'analisi del contributo di errori di natura sistematica.

Il secondo obiettivo di questa esperienza di laboratorio sarà verificare quantitativamente la dipendenza del periodo d'oscillazione  $\tau$  dalla lunghezza del filo  $L$  dalla massa  $m$  e dall'ampiezza d'oscillazione  $\vartheta_0$ . I valori del periodo  $\tau$  così misurati consentiranno poi il calcolo dell'accelerazione di gravità *locale*.

Le misure di laboratorio indicate in 3 e 4 saranno svolte nella prima sessione sperimentale mentre quanto indicato in 5 sarà oggetto della seconda sessione.

I risultati ottenuti andranno sintetizzati in una relazione di laboratorio.

# 2 Materiale a disposizione

Per l'esecuzione dell'esperienza viene fornito il seguente materiale:

- asta con supporto;
- punto di sospensione;
- rocchetto di filo inestensibile ( $\sim 1\text{m}$ );
- set di tre masse;
- un metro a nastro ( $\Delta x_{ris} = 1\text{mm}$ );
- un calibro ventesimale ( $\Delta x_{ris} = 0.05\text{mm}$ );
- due cronometri manuali ( $\Delta x_{ris} = 0.01\text{s}$ );

### 3 Misura del periodo d'oscillazione $\tau$

#### 3.1 Layout sperimentale

Il pendolo sarà montato sul banco usando la massa più pesante a disposizione e una lunghezza  $L$  di circa 100 cm. In figura 1 è rappresentato schematicamente l'apparato sperimentale.

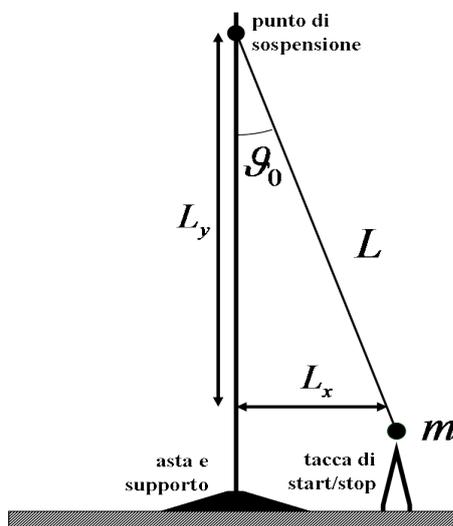


Figura 1: schema dell'apparato sperimentale.

Nella costruzione dell'apparato sperimentale sarà bene mantenere le seguenti attenzioni:

- fissare accuratamente l'asta alla sua base e il punto di sospensione all'asta;
- legare il filo al punto di sospensione e alla massa con nodi *semplici da sciogliere* e tali da non introdurre torsioni del filo o scorrimenti sul punto di sospensione;
- posizionare l'apparato in modo che il pendolo riesca ad oscillare su un piano fisso senza urtare o strisciare;

Per avere oscillazioni isocrone andrà usata un'ampiezza d'oscillazione  $\vartheta_0 \leq 7^\circ$ . Le tacche che indicano il punto di rilascio del pendolo e il punto di start/stop della misura dovranno essere ben visibili ed essere posizionate accuratamente.

#### 3.2 Caratterizzazione del sistema

Prima di procedere alla misura del periodo  $\tau$  è necessario caratterizzare il sistema, cioè misurare accuratamente la lunghezza  $L$  del pendolo e l'angolo  $\vartheta_0$ .

La lunghezza del pendolo  $L$  sarà data da:

$$L = L_{filo} + r_{vincolo} + r_{massa}, \quad (1)$$

con  $r_{vincolo}$  e  $r_{massa}$  il raggio del vincolo e della massa, mentre  $L_{filo}$  è la distanza tra vincolo e bordo superiore della massa. Ciascuna di queste tre misure andrà effettuata con lo strumento più appropriato, quotando la relativa incertezza dovuta alla risoluzione che sarà poi da propagare sulla misura della lunghezza  $L$  (vedi C).

Per quanto riguarda invece la determinazione dell'angolo  $\vartheta_0$  si procederà misurando, con gli strumenti opportuni,  $L_y$  e  $L_x$ , come indicati in figura 1. Si avrà quindi

$$\vartheta_0 = \arctan\left(\frac{L_x}{L_y}\right). \quad (2)$$

In questo caso consideriamo trascurabile l'errore sull'angolo.

### 3.3 Misura del periodo d'oscillazione

Con il pendolo costruito dovranno essere effettuate le seguenti misure del periodo d'oscillazione  $\tau$ :

1. misura di  $N_1 = 200$  periodi d'oscillazione *singola*;
2. misura di  $N_2 = 20$  periodi di *dieci oscillazioni*;

Nel gruppo andrà scelto un'addetto al rilascio del pendolo e due cronometristi che effettueranno la misura *contemporaneamente*. Durante la misura i ruoli non devono essere cambiati. Si abbia cura di:

- rilasciare e non lanciare il pendolo;
- mantenere costante angolo e piano d'oscillazione;
- evitare errori di parallasse sulle tacche indicanti gli angoli;
- annotare ordinatamente il risultato di ogni singola misura;
- verificare che non ci siano oscillazioni del pendolo sulla sua base.

L'effettiva procedura di misura usata deve essere discussa in gruppo e annotata nella relazione.

### 3.4 Discussione dei dati

Al termine della sessione si avranno, per ogni cronometrista, due set di dati. In quanto segue, per brevità, ci si riferirà sempre ad un singolo set di misure. Resta sottinteso che tutte le misure andranno analizzate *separatamente* allo stesso modo.

#### 3.4.1 Distribuzione dei valori di misura

Consideriamo le misure del periodo di una singola oscillazione. Il risultato della misura sia presentato in un opportuno istogramma in cui la larghezza delle colonne sia la risoluzione  $\Delta t$  delle misure. L'intero set di  $N_1$  misure sia poi diviso in  $M_1 = 10$  sottoinsiemi di  $n = 10$  misure ciascuno. In un secondo istogramma, opportunamente normalizzato, si confronti l'intero insieme con un suo campione.

Si determini il valor medio campionario e lo scarto quadratico medio dell'insieme delle  $N_1$  misure. Si avrà:

$$m^*[\tau] = \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} \tau_i; \quad \sigma^*[\tau] = \sqrt{\frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} (\tau_i - m^*)^2}; \quad (3)$$

#### 3.4.2 Distribuzione delle medie

Consideriamo gli  $M_1$  sottoinsiemi di  $n = 10$  misure. Con le relazioni 3 si calcoli il valor medio campionario  $m_k^*[\tau]$  e lo scarto quadratico medio  $\sigma_k^*[\tau]$ . Ovviamente, nelle formule 3 al valore  $N_1$  andrà sostituito  $n$ . Si disegni l'istogramma della distribuzione dei valori medi  $m_k^*$  e se ne calcoli il valor medio campionario,  $m^*[m^*]$  e scarto quadratico medio campionario  $\sigma^*[m^*]$ . Si abbia cura di mantenere la stessa scala orizzontale e la stessa normalizzazione usata negli istogrammi precedenti, in modo da facilitarne il confronto.

#### 3.4.3 Distribuzione limite

Gli istogrammi relativi a misure affette da errori casuali tendono ad assumere, al crescere del numero di misure una forma descrivibile analiticamente mediante la distribuzione normale di Gauss,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right], \quad (4)$$

dove  $x$  è il valore della grandezza soggetta a misura ( $x = \tau$ );  $m$  e  $\sigma$  sono due parametri, rispettivamente il valor medio e lo scarto quadratico medio. Questi parametri possono essere *stimati*

partendo da un campionamento finito della distribuzione limite, cioè da un numero finito di misure. Si dimostra che le migliori stime di  $m$  e  $\sigma$  sono:

$$\tilde{m}[\tau] = m^*[\tau]; \quad \tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{N}{N-1}} \sigma^*[\tau]; \quad (5)$$

con  $N$  è il numero di misure effettuate.

Usando le relazioni 5 si stimino i parametri  $m$  e  $\sigma$  della distribuzione di Gauss relativa all'insieme delle  $N_1$  misure singole. Si disegni quindi la corrispondente distribuzione, equazione 4, e la si confronti con l'istogramma delle  $N_1$  misure (opportunitamente normalizzato). Si proceda analogamente per i valori medi e il loro istogramma.

#### 3.4.4 Valore del periodo $\tau$ - Incertezza dovuta agli errori casuali

A questo punto siamo in grado di sintetizzare il risultato ottenuto nella forma:

$$\tau = \tau_0 \pm \delta\tau.$$

Se la distribuzione limite fosse perfettamente nota si potrebbe assumere come valore vero della grandezza fisica il valore medio della distribuzione limite  $m$ . Come già visto, nel caso di un campionamento finito, la media campionaria rappresenta la miglior stima di  $m$ . Assumiamo quindi che il valore centrale sia dato come

$$\tau_0 = m^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tau_i, \quad (6)$$

con  $N$  il numero di misure considerate.

L'incertezza  $\delta\tau$  dovuta agli errori casuali dipende dalle fluttuazioni della media campionaria  $m^*$  rispetto alla media limite  $m$ , assunta come valore *vero* di  $\tau_0$  (ma non conoscibile con certezza). Queste fluttuazioni sono misurate dallo scarto quadratico medio della distribuzione limite dei valori medi, cioè  $\delta\tau = \sigma[m^*]$ . Si dimostra inoltre che, se la media è calcolata a partire da  $N$  misure lo scarto quadratico medio della distribuzione limite delle medie campionarie,  $\sigma[m^*]$  è legato allo scarto quadratico medio della distribuzione limite di singola misura,  $\sigma[\tau]$  dalla relazione  $\sigma[m^*] = \sigma[\tau]/\sqrt{N}$ . Ricordando che la miglior stima di  $\sigma$  è  $\tilde{\sigma}$ , si ottiene quindi che:

$$\delta\tau = \sigma[m^*] = \frac{1}{\sqrt{N}} \tilde{\sigma}[\tau] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{N}{N-1}} \sigma^*[\tau] = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (\tau_i - m^*)^2}. \quad (7)$$

#### 3.4.5 Risoluzione dello strumento e risoluzione di misura

Le misurazione del periodo d'oscillazione del pendolo è stata eseguita con un cronometro con risoluzione di lettura  $\Delta t = 0.01$  s. Si considerino ora i valori di periodo ottenuti misurando dieci oscillazioni). In questo caso il periodo d'oscillazione sarà  $\tau = t_{mis}/10$ . In questo modo la risoluzione dello strumento da attribuire alla misura sarà  $\Delta t_{10} = \Delta t/10 = 0.001$ .

Si disegni l'istogramma dei valori ottenuti e se ne calcolino valor medio e scarto quadratico medio. Si confrontino i risultati ottenuti in questo caso con quelli relativi alla misura diretta di  $n = 10$  oscillazioni singole. Si commentino eventuali differenze e se ne analizzino le cause.

#### 3.4.6 Errori sistematici

Le procedure sin qui eseguite non consentono di verificare l'eventuale presenza di errori sistematici nelle misure. Per valutare la rilevanza di questo contributo si confrontino le misure raccolte dai due cronometristi. Si valutino e discutano le differenze di natura sistematica e se ne analizzino le cause. Si discuta il perché le analisi sono state condotte separatamente per i due set di misure.

### 3.4.7 Contributi all'incertezza di misura

L'esperienza mette in luce l'esistenza di tre contributi all'incertezza di misura:

1. incertezza dovuta alla risoluzione;
2. incertezza dovuta agli errori casuali;
3. incertezza dovuta agli errori sistematici;

L'incertezza globale della misura dipenderà dal maggiore di questi contributi.

Nell'esecuzione dell'esperienza si sono evidenziati dei metodi per ridurre l'incertezza. Si è visto infatti che  $\delta x_{cas}$  dovuta agli errori casuali può essere ridotta aumentando il numero delle misure  $N$ . Ha comunque poco senso ridurre  $\delta x_{cas}$  ad un valore inferiore all'incertezza dovuta alla risoluzione  $\delta x_{res}$ . Questo contributo, che per uniformità va espresso come scarto quadratico medio di una distribuzione uniforme, cioè  $\delta x_{res} = \Delta x / \sqrt{12}$ , può essere ridotto con opportuni artifici.

Si discutano criticamente le incertezze quotate e i metodi di riduzione delle stesse, tenendo conto anche delle considerazioni fatte circa la presenza di errori sistematici.

## 4 Smorzamento delle oscillazioni

Nel caso reale l'ampiezza d'oscillazione del pendolo si riduce nel tempo a causa dei fenomeni d'attrito.

Si mantenga il layout sperimentale assemblato al punto 3.1. Si posizionino una tacca di inizio misura all'angolo  $\vartheta$  e una seconda tacca di fine misura all'angolo  $\vartheta/2$ . Si contino le oscillazioni necessarie a dimezzare l'ampiezza d'oscillazione per un piccolo angolo,  $\vartheta \simeq 5^\circ$  e un angolo maggiore,  $\vartheta \simeq 45^\circ$ . Prima di effettuare la misura a grande angolo si verifichi che la traiettoria dell'oscillazione sia libera e che la massa stessa sia ben appesa.

Da queste misure si può risalire alla variazione d'ampiezza per singola oscillazione e alla sua eventuale dipendenza dall'angolo. Si consideri se e come questa dipendenza può influenzare le procedure di misura del periodo viste nei punti precedenti.

## 5 Dipendenza del periodo dalla lunghezza, ampiezza e massa

### 5.1 Periodo d'oscillazione del pendolo

Consideriamo un pendolo semplice e come variabile cinematica l'angolo  $\vartheta$ . L'equazione del moto sarà

$$mL \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -mg \sin \vartheta, \quad (8)$$

con  $m$  la massa del pendolo,  $L$  la sua lunghezza e  $g$  l'accelerazione di gravità.

In approssimazione di piccole oscillazioni si può scrivere  $\sin \vartheta \simeq \vartheta$ , da cui si ha

$$L \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -g\vartheta. \quad (9)$$

Si ricava quindi che il periodo di oscillazione  $\tau$  per piccoli angoli vale

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad (10)$$

che mostra come il periodo  $\tau$  dipenda solo dalla lunghezza del pendolo  $L$  e dall'accelerazione di gravità  $g$ .

In realtà, la soluzione esatta dell'equazione 8 mostra che il periodo  $\tau$  dipende non solo dalla lunghezza  $L$  e dall'accelerazione di gravità  $g$  ma anche dall'ampiezza d'oscillazione  $\theta_0$  secondo uno sviluppo in serie i cui primi termini sono

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left[ 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \left( \frac{\vartheta_0}{2} \right) + \frac{4}{96} \sin^4 \left( \frac{\vartheta_0}{2} \right) + \dots \right]. \quad (11)$$

## 5.2 Dipendenza del periodo dalla lunghezza

### 5.2.1 Misure da effettuare

Per questa misura si userà il layout sperimentale descritto al punto 3.1.

In approssimazione di piccole oscillazioni, quindi mantenendo l'ampiezza  $\vartheta_0$  usata per la misura del periodo, punto 3.2, si effettuino le seguenti misure:

1. misura del periodo di 10 oscillazioni con lunghezza  $L_2 \simeq 80$  cm;
2. misura del periodo di 10 oscillazioni con lunghezza  $L_3 \simeq 60$  cm;
3. misura del periodo di 10 oscillazioni con lunghezza  $L_4 \simeq 50$  cm;
4. misura del periodo di 10 oscillazioni con lunghezza  $L_5 \simeq 40$  cm;
5. misura del periodo di 10 oscillazioni con lunghezza  $L_6 \simeq 30$  cm;
6. misura del periodo di 10 oscillazioni con lunghezza  $L_7 \simeq 20$  cm;

Le variazioni della lunghezza andrà effettuata senza tagliare il filo ma spostando il nodo di fissaggio al vincolo. L'eventuale filo in eccesso deve essere disposto in modo tale da non interferire con le oscillazioni. La lunghezza del pendolo e l'angolo  $\vartheta_0$  vanno misurati prima di ogni misurazione, vedi punto 3.2.

Dal dato della misurazione del periodo, punto 3.4.4, è possibile ricavare un ulteriore valore di  $\tau$  a lunghezza  $L_1 \equiv L$ .

### 5.2.2 Grafico lineare

Si riportino i risultati della misura in un grafico ponendo in ascissa la lunghezza  $L$  e in ordinata il periodo d'oscillazione  $\tau$ . Si rappresentino anche le incertezze di misura  $\delta L$  e  $\delta \tau$ .

I dati sperimentali sembrano (*dovrebbero*) non essere compatibili con una legge lineare ma bensì con una legge del tipo

$$\tau = aL^b, \quad (12)$$

con  $a$  e  $b$  parametri incogniti.

Per verificare la fondatezza dell'ipotesi 12 è conveniente linearizzare l'equazione 12. Questo può essere ottenuto passando da una scala lineare ad una scala logarimica. Introduciamo le nuove variabili:

$$X = \log(L); \quad Y = \log(\tau); \quad (13)$$

dove con  $\log$  si indica il logaritmo in base 10.

Se la relazione 12 è corretta, la relazione tra  $Y$  e  $X$  è lineare, con

$$Y = A + BX, \quad (14)$$

con  $A \equiv \log(a)$  e  $B \equiv b$ .

Si rappresenti in un grafico  $Y$  in funzione di  $X$  quotando le relative incertezze (discutendone la propagazione).

### 5.2.3 Determinazione dei parametri $A$ e $B$

Per determinare i parametri  $A$  e  $B$  usiamo la tecnica della *regressione lineare*. La migliore stima dei parametri  $A$  e  $B$  è quella che minimizza la discrepanza tra i punti  $(X_i, Y_i)$  e la retta  $Y = A + BX$ . Come misura della discrepanza si considera la sommatoria

$$\sum_{i=1}^N \frac{(Y_i - A - BX_i)^2}{(\delta Y_i)^2}, \quad (15)$$

con  $\mathcal{N}$  il numero di punti sperimentali. I valori di  $A$  e  $B$  che la minimizzano sono dati da:

$$A = \frac{(\sum_i \omega_i X_i^2) (\sum_i \omega_i Y_i) - (\sum_i \omega_i X_i) (\sum_i \omega_i X_i Y_i)}{\Delta}; \quad (16)$$

$$B = \frac{(\sum_i \omega_i) (\sum_i \omega_i X_i Y_i) - (\sum_i \omega_i Y_i) (\sum_i \omega_i X_i)}{\Delta}. \quad (17)$$

Il denominatore  $\Delta$  è definito come:

$$\Delta = \left( \sum_i \omega_i \right) \left( \sum_i \omega_i X_i^2 \right) - \left( \sum_i \omega_i X_i \right)^2, \quad (18)$$

mentre i pesi  $\omega_i$  sono legati alle incertezze dalla relazione

$$\omega_i = \frac{1}{(\delta Y_i)^2}. \quad (19)$$

Le incertezze sui parametri  $A$  e  $B$  si possono ricavare mediante le relazioni

$$(\delta A)^2 = \frac{\sum_i \omega_i X_i^2}{\Delta}; \quad (\delta B)^2 = \frac{\sum_i \omega_i}{\Delta}; \quad (20)$$

A questo punto è possibile confrontare in un grafico la relazione  $Y = A + BX$  con i valori di  $X$  e  $Y$  sperimentali.

Dai valori di  $A$  e  $B$  si possono ricavare i valori di  $a$  e  $b$  di cui all'equazione 12, con la relativa incertezza. Si confrontino questi risultati con quanto atteso sulla base dell'equazione 10.

## 5.3 Dipendenza del periodo dall'ampiezza

### 5.3.1 Misure da effettuare

Per questa misura si userà nuovamente il layout sperimentale descritto al punto 3.1.

Mantenendo il pendolo ad una lunghezza costante  $L \sim 100$  cm si effettuino le seguenti misure:

1. misura del periodo di 10 oscillazioni con ampiezza  $\vartheta_1 = 5^\circ$ ;
2. misura del periodo di 10 oscillazioni con ampiezza  $\vartheta_2 = 10^\circ$ ;
3. misura del periodo di 10 oscillazioni con ampiezza  $\vartheta_3 = 15^\circ$ ;
4. misura del periodo di 10 oscillazioni con ampiezza  $\vartheta_4 = 20^\circ$ ;
5. misura del periodo di 10 oscillazioni con ampiezza  $\vartheta_5 = 30^\circ$ ;
6. misura del periodo di 10 oscillazioni con ampiezza  $\vartheta_6 = 40^\circ$ ;

La lunghezza del pendolo e l'angolo  $\vartheta_0$  vanno misurati prima di ogni misurazione, vedi punto 3.2. Anche in questo caso si trascurino le incertezze sugli angoli.

Nelle misure ad alti angoli si presti la massima attenzione ad eliminare le oscillazioni del pendolo sulla sua base.

### 5.3.2 Confronto con la teoria

Si riportino in un grafico i valori di  $\tau$  misurati in funzione dell'ampiezza d'oscillazione e li si confronti con l'andamento teorico atteso sulla base dell'equazione 11 calcolata per un pendolo di lunghezza  $L$ .

Si valuti l'accordo dei dati misurati con l'andamento teorico. Si verifichi l'esistenza di eventuali contributi di natura sistematica alla discrepanza e se ne discuta l'origine.

## 5.4 Dipendenza del periodo dalla massa

### 5.4.1 Misure da effettuare

Per questa misura si userà nuovamente il layout sperimentale descritto al punto 3.1.

Mantenendo il pendolo ad una lunghezza costante  $L \sim 100$  cm in approssimazione di piccole oscillazioni,  $\vartheta_0 = 5^\circ$  si effettuino le seguenti misure:

1. misura del periodo di 10 oscillazioni con massa  $m_1$ ;
2. misura del periodo di 10 oscillazioni con massa  $m_2$ ;
3. misura del periodo di 10 oscillazioni con massa  $m_3$ ;

La lunghezza del pendolo e l'angolo  $\vartheta_0$  vanno misurati prima di ogni misurazione, vedi punto 3.2. Anche in questo caso si trascurino le incertezze sugli angoli. Il valore delle tre masse e la relativa incertezza di misura sarà fornito durante la sessione di laboratorio.

### 5.4.2 Confronto con la teoria

Si riportino in un grafico i valori di  $\tau$  misurati in funzione delle diverse masse. Si raffigurino anche le relative incertezze espresse come barre d'errore. Si discuta il risultato ottenuto sulla base anche delle equazioni 10 e 11.

## 6 Misurazione dell'accelerazione di gravità

In approssimazione di piccole oscillazioni il periodo  $\tau$  di un pendolo semplice dipende dalla lunghezza  $L$  e dalla gravità  $g$  attraverso la relazione

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}, \quad (21)$$

l'accelerazione di gravità può essere quindi ricavata come:

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{\tau^2}. \quad (22)$$

Partendo quindi dai valori di  $\tau$  in funzione di  $L$  misurati, attraverso la 22 sarà possibile determinare  $g$ . L'errore  $\delta g$  è ottenibile propagando opportunamente  $\delta\tau$  e  $\delta L$ .

Dai dati a disposizione è possibile ricavare un valore dell'accelerazione di gravità attraverso tre metodi.

Nel primo caso si può considerare la media *pesata* dei  $g_i$  con la relativa incertezza  $\delta g_i$ . In questo tipo di media, punti con diversa incertezza vengono pesati diversamente. In sostanza una misura che ha bassa incertezza contribuisce in modo più significativo alla media e viceversa. Si ha che:

$$\langle g \rangle = \frac{\sum_i \omega_i g_i}{\sum_i \omega_i}; \quad \delta g = \frac{1}{\sqrt{\sum_i \omega_i}}; \quad \text{dove } \omega_i = \frac{1}{(\delta g_i)^2}; \quad (23)$$

Si consideri anche la distribuzione dei valori  $g_i$  calcolandone il valore medio  $\langle g_i \rangle$  e lo scarto quadratico medio  $\sigma[\langle g_i \rangle]$ . Si determini infine  $g = g \pm \delta g = \langle g \rangle \pm g[\langle g \rangle]$ .

È possibile inoltre determinare il valore di  $g$  attraverso il risultato della regressione lineare effettuata al punto 5.2.3. Infatti il parametro  $A \equiv \log(a)$  è legato a  $g$ . In particolare si ha che

$$g = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2. \quad (24)$$

Si ricavi quindi il valore dell'accelerazione di gravità ottenuto via regressione lineare quotandone la relativa incertezza ottenuta propagando l'incertezza  $\delta a$  sull'equazione 24.

latitudine (°)	$g_e$ (m/s <sup>2</sup> )	$g_0$ (m/s <sup>2</sup> )
0	9.78039	9.81424
10	9.78195	9.81478
20	9.78329	9.81630
30	9.79329	9.81867
40	9.80171	9.82157
50	9.81071	9.82469
60	9.81918	9.82764
70	9.82608	9.83004
80	9.83059	9.83161
90	9.83217	9.83217

Tabella 1: Accelerazione di gravità  $g_e$  misurata al livello del mare nel sistema di riferimento solidale alla Terra e  $g_0$  calcolata per il sistema di riferimento inerziale. L'incertezza è dell'ordine di  $0.1 \div 0.2$  ppm.

### 6.0.3 Confronto con i valori tabulati

Se la Terra fosse una sfera omogenea di raggio  $R_\oplus$  e massa  $M_\oplus$  l'accelerazione di gravità  $g_0$  al livello del mare misurata in un sistema di riferimento *inerziale* sarebbe data da

$$g_0 = G \frac{M_\oplus}{R_\oplus^2}, \quad (25)$$

dove  $G$  è la costante di gravitazione universale. In realtà la Terra non è una sfera perfetta ma bensì un ellissoide di rotazione schiacciato ai poli. Ci sarà pertanto una variazione della  $g_0$  in funzione della latitudine dovuta a questa variazione del raggio. Fluttuazioni minori di  $g_0$  sono dovute a variazioni locali di forma e densità.

La misura dell'accelerazione di gravità è stata fatta in un sistema di riferimento solidale con la Terra, cioè un sistema di riferimento *non inerziale*. Si discuta quale relazione lega l'accelerazione di gravità  $g_0$  con la  $g_e$  misurata in un sistema non inerziale.

L'accelerazione di gravità varia anche in funzione della quota di misura. Avendo eseguito la misurazione sostanzialmente sul livello del mare si trascura questa dipendenza.

In tabella 1 sono riportati i valori di  $g_0$  e  $g_e$  in funzione della latitudine.

Si confrontino opportunamente i valori di  $g$  misurati con i corretti valori di accelerazione di gravità tabulati.

## A Cifre significative, arrotondamenti ed incertezza di misura

Nella pratica scientifica e tecnologica si ha talora a che fare con valori numerici esatti, più spesso si ha a che fare con valori numerici approssimati.

Le cifre significative (in inglese *significant digits*) di un valore numerico approssimato ne individuano la precisione. Il numero di cifre significative in un valore numerico approssimato si ottiene contando le cifre da sinistra verso destra, a partire dalla prima cifra diversa da zero. Gli eventuali zeri a sinistra delle cifre significative hanno valore puramente posizionale. Ad esempio:

il numero 25.04	ha 4 cifre significative: 2 5 0 4
il numero 0.0037	ha 2 cifre significative: 3 7
il numero 0.50	ha 2 cifre significative: 5 0

Il conteggio delle cifre significative non è ovvio quando il valore numerico è intero e termina con uno o più zeri, ad esempio 350 oppure 47000. In tali casi è necessario sapere se uno o più zeri hanno valore puramente posizionale anziché significativo. La notazione scientifica consente di evitare equivoci. Come esempio consideriamo il numero 2700:

$2.7 \times 10^3$	ha 2 cifre significative
$2.70 \times 10^3$	ha 3 cifre significative
$2.700 \times 10^3$	ha 4 cifre significative

Talora è necessario ridurre il numero di cifre significative di un valore numerico. In tal caso la cifra meno significativa rimasta va arrotondata secondo le regole seguenti:

1. se la cifra più significativa da eliminare è 0, 1, 2, 3, 4, allora la cifra meno significativa rimasta resta inalterata (arrotondamento per difetto).
2. se la cifra più significativa da eliminare è 6, 7, 8, 9 oppure 5 seguito da almeno una cifra diversa da zero, allora la cifra meno significativa rimasta viene maggiorata di un'unità (arrotondamento per eccesso).
3. se la cifra più significativa da eliminare è 5 seguito solo da zeri, allora la cifra meno significativa rimasta resta inalterata quando è pari, viene maggiorata di un'unità quando è dispari (regola del numero pari).

Le regole suesposte, ed in particolare la regola del numero pari, sono costruite in modo che il valor medio di un insieme di valori numerici venga modificato meno possibile dall'operazione di arrotondamento.

Quando si eseguono dei calcoli su valori numerici approssimati, le cifre del risultato non sono in genere tutte significative; il risultato andrà perciò arrotondato in modo da mantenere solo le cifre significative. Non esistono regole rigorose e sempre valide per decidere quante cifre sono significative in un risultato. Si possono comunque dare alcune indicazioni di massima. Nel caso di addizioni e sottrazioni di numeri approssimati: le cifre di una somma o una differenza non sono significative alla destra della posizione che corrisponde alla cifra meno significativa in uno qualsiasi dei termini da sommare o sottrarre. Nel caso di moltiplicazioni e divisioni di numeri approssimati: se il numero che ha meno cifre significative ne ha  $n$ , è ragionevole arrotondare il risultato all' $n$ -ma cifra significativa, in taluni casi anche all' $(n + 1)$ -ma. Le radici quadrate di numeri approssimati vanno generalmente arrotondate allo stesso numero di cifre significative del radicando.

Nel caso delle misure di grandezze fisiche l'incertezza determina il numero di cifre significative. D'altro lato il calcolo stesso dell'incertezza spesso richiede l'utilizzo di tecniche di arrotondamento. Ricordiamo innanzitutto due regole:

1. l'incertezza  $\delta X$  va espressa con non più di due cifre significative (in molti casi può essere sufficiente una sola cifra significativa);
2. nell'espressione di una misura nella forma  $X_0 \pm \delta X$ , l'ultima cifra significativa del valore centrale  $X_0$  deve essere dello stesso ordine di grandezza dell'ultima cifra significativa dell'incertezza.

Ad esempio, nel caso di misurazioni ripetute affette da errori casuali, il valore centrale  $X_0$  e l'incertezza  $\delta X$  vengono stimati a partire dai dati sperimentali attraverso una serie di operazioni. Questi devono essere arrotondati applicando le due regole precedenti.

## B Grafici e istogrammi

I grafici consentono di rappresentare in modo sintetico e suggestivo i valori di due o più quantità tra di loro correlate. Nel disegnare un grafico è bene tener conto di alcune regole che consentono di renderlo più leggibile ed efficace:

- la variabile indipendente va generalmente rappresentata sull'asse delle ascisse;
- se un grafico si riferisce a grandezze fisiche, è necessario indicare esplicitamente per ogni asse non solo il nome della corrispondente grandezza fisica, ma anche l'unità di misura utilizzata;
- le scale sugli assi vanno scelte in modo che le coordinate di ogni punto sul grafico possano essere determinate velocemente e con facilità;
- se i punti nel grafico corrispondono a dati sperimentali, le incertezze dei valori di misura vanno indicate mediante segmenti (detti convenzionalmente barre d'errore, in inglese *error bars*), orizzontali per le grandezze in ascissa e verticali per le grandezze in ordinata;
- il tipo di scala su ogni asse (scala lineare, semi-logaritmica, logaritmica, etc.) può spesso essere scelto in modo che i punti del grafico si dispongano lungo una retta.

Un istogramma è un particolare tipo di grafico in cui la quantità in ascissa assume valori discreti, in genere equispaziati, e il valore della quantità in ordinata è rappresentato graficamente dall'altezza di una colonnina.

Gli  $N$  valori discreti riportati in ascissa sono individuati da un indice  $j$  ( $j = 1 \dots N$ ). Spesso i valori discreti sull'asse delle ascisse corrispondono ad intervalli  $\Delta x_j$  di una quantità  $x$  (tipicamente una grandezza fisica) e la quantità in ordinata (altezza delle colonnine) è un numero intero  $n_j$ . In genere, ma non necessariamente, tutti gli intervalli di uno stesso istogramma hanno la medesima ampiezza  $\Delta x$ . Ovviamente se la quantità  $x$  è una grandezza fisica si dovrà indicarne l'unità di misura. Indicheremo con  $N$  la somma dei valori  $n_j$  di tutte le colonne:

$$N = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} n_j \quad (26)$$

Un istogramma può essere *normalizzato in altezza*, quando ogni colonna è proporzionale al rapporto  $n_j/N$ . Il rapporto

$$p_j = \frac{n_j}{N}, \quad (27)$$

è detto frequenza campionaria. Si verifica facilmente che la somma delle altezze di tutte le colonne è unitaria. Questa normalizzazione è utile quando si vogliono confrontare istogrammi relativi alla stessa quantità in ascissa ma basati su diversi dati totali in ordinata.

Si dice invece che l'istogramma è normalizzato in area se l'altezza di ogni colonna è proporzionale alla densità campionaria,

$$f_j = \frac{n_j}{N \Delta X_j}. \quad (28)$$

Si può verificare che la somma delle aree di tutte le colonnine è unitaria. La normalizzazione in area è necessaria se si vogliono confrontare istogrammi con colonne di basi diverse oppure se si vuole confrontare un istogramma con una distribuzione di variabile aleatoria continua rappresentata da una densità di probabilità  $f(x)$ .

## C Propagazione degli errori

Consideriamo il problema del calcolo del valore centrale  $Q_0$  e dell'incertezza  $\delta Q$  nel caso generale che questa sia legata a delle grandezze misurabili direttamente  $X, Y, Z, \dots$  da una relazione del tipo

$Q = f(X, Y, Z, \dots)$ . Senza perdere di generalità consideriamo il caso di due sole grandezze misurate direttamente,  $Q = f(X, Y)$ .

Supponiamo che le due grandezze siano *statisticamente indipendenti*. Supponiamo di conoscere la distribuzione limite di  $X$  e  $Y$  con valori medi  $X_0$  e  $Y_0$ . Consideriamo ora due singole misure  $x$  e  $y$ . Le due grandezze si dicono statisticamente indipendenti se gli scarti sono scorrelati, ovvero se la conoscenza di  $x - X_0$  non mi permette di dire nulla di  $y - Y_0$  e viceversa. Questa definizione non va confusa con quella di correlazione (esempio: lunghezza e periodo di un pendolo sono correlati ma sono statisticamente indipendenti). Questo concetto è generalizzabile a  $N$  grandezze fisiche.

Il problema del calcolo di  $Q_0$  e  $\delta Q$  si basa sulla linearizzazione locale della funzione in un intorno dei valori centrali  $X_0$  e  $Y_0$ . Si ha quindi che

$$Q_0 \simeq f(X_0, Y_0), \quad (29)$$

mentre l'incertezza può essere calcolata come

$$(\delta Q)^2 \simeq \left( \frac{\partial Q}{\partial X} \right)_0^2 (\delta X)^2 + \left( \frac{\partial Q}{\partial Y} \right)_0^2 (\delta Y)^2. \quad (30)$$

La generalizzazione dell'equazione 30 al caso generale di  $N$  variabili,  $Q = f(X, Y, Z, \dots)$  è immediata:

$$(\delta Q)^2 \simeq \left[ \left( \frac{\partial Q}{\partial X} \right)_0^2 (\delta X)^2 + \left( \frac{\partial Q}{\partial Y} \right)_0^2 (\delta Y)^2 + \left( \frac{\partial Q}{\partial Z} \right)_0^2 (\delta Z)^2 + \dots \right]. \quad (31)$$

L'approssimazione di linearità locale è tanto più valida quanto sono piccole le incertezze rispetto ai valori centrali.

Nel caso di *dipendenza statistica* delle misure si può dimostrare che il limite superiore all'incertezza di una grandezza misurata indirettamente, qualunque sia il grado di dipendenza statistica delle misure dirette, vale:

$$\delta Q \simeq \left[ \left| \frac{\partial Q}{\partial X} \right|_0 \delta X + \left| \frac{\partial Q}{\partial Y} \right|_0 \delta Y + \left| \frac{\partial Q}{\partial Z} \right|_0 \delta Z + \dots \right]. \quad (32)$$

Nelle misure descritte in questa esperienza l'ipotesi di indipendenza statistica è da considerarsi sempre verificata.