Esercizi (LEZIONE 1)

1/ Eq. a variabili separabili: $\boxed{(1+x)\,y'(x) = y(x)+1}$

FORMA NORMALE : $y'(x) = \frac{1}{1+x} \cdot [y(x)+1]$ "$g(x)\,h(y)$"

(•) Osservo che $y(x) \equiv -1$ è una soluzione costante...

(•) Assumendo $y(x) \neq -1$, posso dividere per $[y(x)+1]$

$$\frac{y'(x)}{y(x)+1} = \frac{1}{1+x} \Rightarrow \int \frac{y'(x)}{y(x)+1}\,dx = \int \frac{1}{1+x}\,dx$$

cambio variabile : $y(x) = \tilde{y} \rightsquigarrow y'(x)\,dx = d\tilde{y}$

$$\int \frac{1}{\tilde{y}+1}\,d\tilde{y} = \int \frac{1}{1+x}\,dx \Rightarrow \log|y+1| = \log|1+x| + c$$

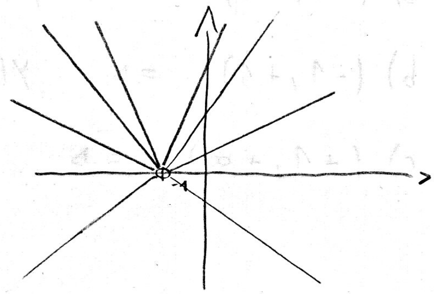
$$\Rightarrow |y+1| = e^c\,|1+x| \Rightarrow |y+1| = C_1\,|1+x| \quad [C_1 = e^c]$$

$$\Rightarrow y+1 = \pm C_1|1+x| \Rightarrow y+1 = C_2|1+x| \quad [C_2 = \pm C_1]$$

$$\Rightarrow \boxed{y = C_2|1+x|}$$ "soluz. definita su tutto $\mathbb{R}$"

Quindi le soluzioni sono :

$y(x) \equiv -1$ & $y(x) = c_2|1+x|$



(NB) Precisazione : le soluzioni $y(x) = c_2|1+x|$ non sarebbero definite su tutto $\mathbb{R}$ per come le abbiamo derivate, ma lo diventano studiandone il comport. in "0"

2

Eq. a Variabili Separ.

$$\boxed{y'(x) = \frac{2x\ y(x)}{x^2-1}}$$

(•) $y'(x) = \frac{2x}{x^2-1} \cdot y(x) = g(x) \cdot h(y)$ Dom $= \{x \neq \pm 1\}$

(•) $h(y) = 0 \Rightarrow y(x) \equiv 0$ è soluzione!

(•) $h(y) \neq 0 \Rightarrow$ divido le variabili:

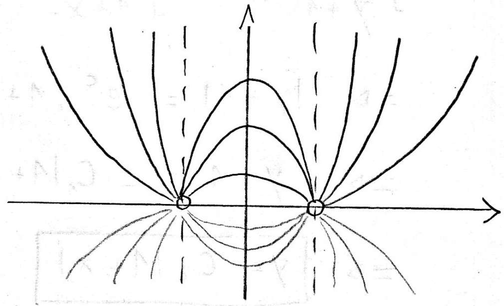
$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{2x}{x^2-1} \Rightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{2x}{x^2-1}\,dx$$

$$\Rightarrow \log|y| = \log|x^2-1| + c \Rightarrow |y| = c\,|x^2-1|$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = c\,|x^2-1|} \quad \text{è soluzione!}$$

È definita ovunque, ma rispetto al dominio in cui la stiamo cercando è definita per $x \neq \pm 1$

Quindi in $(-\infty,-1)$, $(-1,+1)$, $(+1,+\infty)$



a) $(-\infty,-1) \Rightarrow y(x) = c\,(x^2-1)$

b) $(-1,+1) \Rightarrow y(x) = c\,(1-x^2)$

c) $(+1,+\infty) \Rightarrow y(x) = c\,(x^2-1)$

3/ Eq. a coeffic. costanti $\boxed{y'' + 2y' + y = e^{-x}}$

(•) Risolvo innanzitutto l'omogenea associata:

EQ CARATT: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda+1)^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda = -1$ è soluz. di molteplicità 2, quindi

le soluz. lin. indip. dell'omogenea sono: $\{e^{-x}, x e^{-x}\}$

$\Rightarrow$ SOLUZ OMOGENEA: $\boxed{y_0(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}}$

(•) Per ricavare una soluzione particolare, usiamo il Metodo di Somiglianza: $y_p(x) = Ax^2 e^{-x}$

$y_p'(x) = 2Ax e^{-x} + Ax^2(-e^{-x}) = [2Ax - Ax^2] e^{-x}$

$y_p''(x) = [2A - 2Ax] e^{-x} + [2Ax - Ax^2](-e^{-x}) = [2A - 4Ax + Ax^2] e^{-x}$

Inseriamo nell'equazione originale: $y_p'' + 2y_p' + y_p = e^{-x}$

$[2A - 4Ax + Ax^2]\cancel{e^{-x}} + 2[2Ax - Ax^2]\cancel{e^{-x}} + Ax^2\cancel{e^{-x}} = \cancel{e^{-x}}$

$2A \cancel{-4Ax} + \cancel{Ax^2} + \cancel{4Ax} - \cancel{2Ax^2} + \cancel{Ax^2} = 1 \qquad A = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ SOLUZ PARTIC. $\boxed{y_p(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{-x}}$

Perciò una qualunque soluzione dell'eq. originale è:

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + \frac{1}{2} x^2 e^{-x}}$$

4/ Variazione delle Costanti $\boxed{y''(t) + y(t) = \frac{1}{\cos t}}$

(•) Soluz Omogenea : $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$

$\Rightarrow \{\cos(t), \sin(t)\} \Rightarrow \boxed{Y_0(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)}$

(•) Soluz. Particolare : usiamo il Metodo di Variazione :

cerco soluz del tipo $y_p(t) = c_1(t)\cos(t) + c_2(t)\sin(t)$

Per ricavare $c_1(t)$ e $c_2(t)$ risolvo il seguente Sistema :

$$\begin{cases} y_1(t)\, c_1'(t) + y_2(t)\, c_2'(t) = 0 \\ y_1'(t)\, c_1'(t) + y_2'(t)\, c_2'(t) = f(t) \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \left[W(t)\right]\begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \cos(t)\, c_1'(t) + \sin(t)\, c_2'(t) = 0 \\ -\sin(t)\, c_1'(t) + \cos(t)\, c_2'(t) = \frac{1}{\cos t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1'(t) = -\frac{\sin(t)}{\cos(t)}\, c_2'(t) \\ \frac{\sin^2(t)}{\cos(t)}\, c_2'(t) + \cos(t)\, c_2'(t) = \frac{1}{\cos(t)} \end{cases}$$

$\Rightarrow \sin^2(t)\, c_2'(t) + \cos^2(t)\, c_2'(t) = 1 \Rightarrow \boxed{c_2'(t) = 1}$

$c_1(t) = -\frac{\sin t}{\cos t} \cdot 1 = -\tan(t) \Rightarrow \boxed{c_1'(t) = -\tan(t)}$

Perciò, integrando queste due condizioni, ottengo :

$c_2(t) = t$ / $c_1(t) = -\int \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\,dt = +\int \frac{-\sin(t)}{\cos(t)}\,dt = \log(\tan(t))$

$\Rightarrow$ SOLUZ. PARTIC. $\boxed{y_p(t) = \log(\tan(t))\cos(t) + t \cdot \sin(t)}$

Esercizio (1) determinare l'integrale generale di $y' = e^{x-y}$ e risolvere il Problema di Cauchy con $y(0)=0$

sol) È equaz. a variab. separab. $\rightsquigarrow \frac{dy}{dx} = e^x \cdot \frac{1}{e^y}$

Non ci sono soluz. banali $y = c \rightsquigarrow \frac{1}{e^y} = 0 \longleftrightarrow \nexists$

Le soluz. non costanti si calcolano integrando formalmente:

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot \frac{1}{e^y} \Rightarrow e^y dy = e^x dx \Rightarrow \int e^y dy = \int e^x dx$$

$$\Rightarrow e^y = e^x + c \Rightarrow \boxed{y = \log(e^x + c)} \qquad c \in \mathbb{R}$$

(•) Calcoliamo il dominio per tali soluzioni:

$e^x + c > 0 \iff e^x > -c$ → se $c \geq 0 \Rightarrow \forall x$; → se $c < 0 \Rightarrow x > \log(-c)$

(•) Soluz. P.C. $y(0) = \log(e^0 + c) = \log(1+c)$

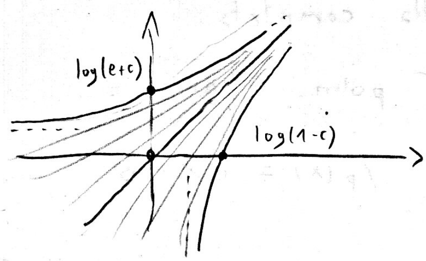
$y(0) = 0 \iff \log(1+c) = 0 \longrightarrow 1 + c = 1 \longrightarrow c = 0$.

Quindi la soluz. del P.C. è $\boxed{y(x) = \log(e^x) = x}$

(•) Studio delle soluzioni ... (MINI STUDIO - FUNZIONE)

$\lim_{x \to +\infty} y(x) = \log(e^{+\infty} + c) = +\infty$ / $\lim_{x \to -\infty} y(x) = \log(c)$ (se $c \geq 0$)

$y'(x) = \frac{1}{e^x + c} \cdot e^x = \frac{e^x}{e^x + c}$ → per $c \geq 0$ è crescente sempre ; → per $c < 0$ è crescente nel dominio!



se $c \geq 0 \rightsquigarrow y(0) = \log(e + c)$

se $c < 0 \rightsquigarrow \log(e^x + c) = 0 \iff x = \log(1-c)$

ESERCIZIO (2) : studiare le soluz. di $y' = (y-1)\cos x$

Sol] Osserviamo che $y = 1$ è soluzione ... se ora $y \neq 1$:

$$\frac{dy}{dx} = (y-1)\cos x \Rightarrow \int \frac{dy}{y-1} = \int \cos x \, dx$$

$$\Rightarrow \log|y-1| = \sin x + c \Rightarrow |y-1| = e^{\sin x + c}$$

$$\Rightarrow y - 1 = \pm c\, e^{\sin x} \Rightarrow \boxed{y = c\, e^{\sin x} + 1}$$

(di volta in volta "inglobo" in "c" tutto quello che è costante!)

Esistono soluzioni illimitate? No, perché:

$$|y(x)| = |1 + c e^{\sin x}| \leq 1 + |c e^{\sin x}| = 1 + |c| e^{\sin x} \leq 1 + |c| e$$

Quindi $y(x)$ è limitata $\forall x$ ($y(x) \in [-1-|c|e, +1+|c|e]$)

ESERCIZIO (3) Scrivere l'integrale generale dell'equaz. differenz. $y'' + y' - 2y = -2x$ e risolvere il Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = -2x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Sol] Risolvo innanzitutto l'omogenea:

$$y'' + y' - 2y = 0 \Rightarrow \text{eq. caratt.} \quad \lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda+2)(\lambda-1) = 0 \qquad \lambda_1 = -2 \,/\, \lambda_2 = 1 \Rightarrow \boxed{\text{Sol. } y_0(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}}$$

Cerchiamo ora una soluz. particolare della completa:

METODO DI SOMIGLIANZA : $f(x) = -2x$ è polin. 1° grado.

Poiché 0 non è soluz. dell'omog. cerco $y_p(x) = ax + b$

$y_p'(x) = a \;/\; y_p''(x) = 0 \quad \rightsquigarrow$ inserisco nell'eq. diff.

$$0 + a - 2(ax+b) = -2x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a - 2b = 0 \\ -2a = -2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} b = 1/2 \\ a = 1 \end{matrix}$$

$\Rightarrow \quad y_p(x) = x + \frac{1}{2}$ è soluzione particolare:

Quindi $y(x) = y_0(x) + y_p(x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} + x + \frac{1}{2}}$

Per trovare ora la soluzione di P.C. inserisco le 2 condiz.:

(•) $y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 + c_2 + \frac{1}{2} = 0$

(•) $y'(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad -2c_1 + c_2 + \cancel{1} = \cancel{1}$

$\rightsquigarrow \quad c_1 = -\frac{1}{6} \;/\; c_2 = -\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \quad y(x) = -\frac{1}{6} e^{-2x} - \frac{1}{3} e^{x} + x + \frac{1}{2} \qquad \checkmark$$

ESERCIZIO (4) Studiare le soluz. dell'equaz. differenziale $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \cos x$

Sol) Risolvo intanto l'omogenea $y'' - 4y' + 5y = 0$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm i$$

$$\Rightarrow \quad y_0(x) = e^{2x}\left(c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)\right)$$

Ora cerchiamo una soluzione particolare della completa!
Poiché $\lambda = 2 + i$ è soluzione dell'omogenea, prendiamo una soluzione $y_p(x)$ del tipo: $\quad y_p(x) = x e^{2x}(A\cos x + B\sin x)$

$$y_p'(x) = (e^{2x} + 2x e^{2x})(A\cos x + B\sin x) + x e^{2x}(-A\sin x + B\cos x) =$$
$$= e^{2x}\left[(A + 2Ax + Bx)\cos x + (B + 2Bx - Ax)\sin x\right]$$

$$y_p''(x) = 2e^{2x}\left[(A + 2Ax + Bx)\cos x + (B + 2Bx - Ax)\sin x\right] +$$
$$+ e^{2x}\left[(2A+B)\cos x - (A + 2Ax + Bx)\sin x + (2B - A)\sin x + (B + 2Bx - Ax)\cos x\right] =$$
$$= e^{2x}\left[(4A + 2B + 3Ax + 4Bx)\cos x + (-2A + 4B - 4Ax + 3Bx)\sin x\right]$$

Inseriamo il tutto nell'eq.: $y_p'' - 4y_p' + 5y_p = e^{2x}\cos x$

$$\cancel{e^{2x}}\left[(4A+2B+3Ax+4Bx)\cos x + (-2A+4B-4Ax+3Bx)\sin x\right] +$$
$$-4\cancel{e^{2x}}\left[(A+2Ax+Bx)\cos x + (B+2Bx-Ax)\sin x\right] +$$
$$+5x\cancel{e^{2x}}\left[A\cos x + B\sin x\right] = \cancel{e^{2x}}\cos x$$

$$\begin{cases} \cancel{4A}+2B+\cancel{3Ax}+\cancel{4Bx}-\cancel{4A}-\cancel{8Ax}-\cancel{4Bx}+\cancel{5Ax} = 1 \\ -2A+\cancel{4B}-\cancel{4Ax}+\cancel{3Bx}-\cancel{4B}-\cancel{8Bx}+\cancel{4Ax}+\cancel{5Bx} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2B = 1 \\ -2A = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \quad A = 0 \;/\; B = \frac{1}{2} \qquad \boxed{y_p(x) = \frac{1}{2}xe^{2x}\sin x}$$

$\rightsquigarrow$ Soluz. Completa: $\boxed{y(x) = e^{2x}(c_1\cos x + c_2\sin x) + \frac{1}{2}xe^{2x}\sin x}$

<u>ESERCIZIO (5)</u>: <u>Trovare l'integrale generale dell'equaz. differenz. $y'' + 2y' + y = e^{-x}$, facendo uso del "Metodo di Variazione delle Costanti Arbitrarie".</u>

Risolvo l'omogenea: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \rightsquigarrow \lambda_{1,2} = -1$

la soluz. dell'omogenea è: $\boxed{y_0(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}}$

Usiamo ora il Metodo di Variaz. delle Costanti Arbitrarie:

$$\begin{cases} c_1'(x)\,y_1(x) + c_2'(x)\,y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)\,y_1'(x) + c_2'(x)\,y_2'(x) = \sin x \end{cases} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin x \end{bmatrix}$$

$$W(x) = \begin{bmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & (1-x)e^{-x} \end{bmatrix} \qquad \det W(x) = e^{-2x} \neq 0 \quad \forall x$$

Una soluzione per $c_1'(x)$, $c_2'(x)$ è data da:

$$\begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^{-1}(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \sin x \end{bmatrix} \qquad \text{Calcolo perciò } W^{-1}(x):$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} e^{-x} & xe^{-x} & 1 & 0 \\ 0 & e^{-x} & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} e^{-x} & 0 & 1-x & -x \\ 0 & e^{-x} & 1 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & (1-x)e^{x} & -xe^{x} \\ 0 & 1 & e^{x} & e^{x} \end{array}\right] \rightsquigarrow W^{-1}(x) = \begin{bmatrix} (1-x)e^{x} & -xe^{x} \\ e^{x} & e^{x} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-x)e^{x} & -xe^{x} \\ e^{x} & e^{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -xe^{x}e^{-x} \\ e^{x}e^{-x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ 1 \end{bmatrix}$$

Perciò abbiamo: $\left[c_1'(x) = -x\right]$ e $\left[c_2'(x) = 1\right]$ da cui:

$c_1(x) = -\frac{x^2}{2} + a$ / $c_2(x) = x + b$ (a, b arbitrarie)

Poiché ci serve soltanto 1 soluzione particolare, possiamo scegliere $a = b = 0$ (la scelta è arbitraria) per cui:

$$y_p(x) = c_1(x)\,y_1(x) + c_2(x)\,y_2(x) =$$
$$= -\frac{x^2}{2}(e^{-x}) + x(xe^{-x}) = \left(-\frac{x^2}{2} + x^2\right)e^{-x} = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$$

La soluz. completa è: $\boxed{y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 e^{-x}}$

ESERCIZIO (6): Trovare l'integrale generale dell'eq. $y'' + y = (x^2+1)e^{x}$ e risolvere il problema al contorno con $y(0) = 1$ e $y(\frac{\pi}{2}) = 0$

OMOGENEA: $y'' + y = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$

Soluz. Omogenea: $y_o(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

SOL. PART: Usiamo il metodo di somiglianza:

Poiché $\lambda = 1$ non è soluz. $y_p(x) = (Ax^2 + Bx + C)e^{x}$

$$y'_p(x) = (2Ax + B)\,e^x + (Ax^2+Bx+C)\,e^x =$$
$$= [Ax^2 + (2A+B)x + (B+C)]\,e^x$$

$$y''_p(x) = [2Ax + (2A+B)]\,e^x + [Ax^2+(2A+B)x+(B+C)]\,e^x =$$
$$= [Ax^2 + (4A+B)x + (2A+2B+C)]\,e^x$$

Inserendo questo in $y''_p(x) + y_p(x) = (x^2+1)\,e^x$

$$[Ax^2+(4A+B)x+(2A+2B+C)]\,\cancel{e^x} + [Ax^2+Bx+C]\,\cancel{e^x} = (x^2+1)\,\cancel{e^x}$$

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ 4A+B+B = 0 \\ 2A+2B+C+C = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} A = 1/2 \\ B = -2A \\ C = \frac{1-2A-2B}{2} \end{cases} \rightsquigarrow \begin{matrix} A = 1/2 \\ B = -1 \\ C = 1 \end{matrix}$$

Quindi la soluz. particolare è : $y_p(x) = \left[\frac{1}{2}x^2 - x + 1\right] e^x$

e le soluz. della completa : $\boxed{y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \left(\frac{1}{2}x^2 - x + 1\right) e^x}$

Ora se voglio risolvere il Problema al Contorno:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 + 1 = 1 \\ c_2 + \left(\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} + 1\right) e^{\frac{\pi}{2}} = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{matrix} c_1 = 0 \\ c_2 = -\left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{2} + 1\right) e^{\frac{\pi}{2}} \end{matrix}$$

$\rightsquigarrow$ SOLUZ : $\boxed{y(x) = -\left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{2} + 1\right) e^{\frac{\pi}{2}} \sin x + \left(\frac{1}{2}x^2 - x + 1\right) e^x}$