

SCALARI E VETTORI

Alcune osservabili fisiche (per esempio, la *massa* di un oggetto, la posizione di un punto) possono essere caratterizzate matematicamente mediante un numero. Tali osservabili sono dette **scalari**. Esistono tuttavia osservabili per le quali un solo numero non è sufficiente per dare una descrizione completa. Ad esempio, lo *spostamento* di un punto è un ente geometrico che viene compiutamente caratterizzato se ne vengono assegnate non solo la *lunghezza* ma anche la *direzione* e il *verso*. Per questo tipo di osservabili non valgono le regole dell'algebra ordinaria (algebra dei numeri): occorre introdurre nuove regole di calcolo. Gli spostamenti e tutte le osservabili che, come questi, possono essere rappresentate da segmenti orientati, e per le quali abbia senso lo stesso tipo di algebra utile per gli spostamenti, sono dette **vettori**. Esse vengono indicate mediante lettere, maiuscole o minuscole, in grassetto (es.: **A**, **a**) o sottolineate (A, a) o, ancora, disegnando una freccetta sopra la lettera (\vec{a} , \vec{A}). Due segmenti orientati che hanno uguale lunghezza, direzione e verso si dicono equipollenti: questo ci permette di “trasportare” vettori parallelamente a se' stessi per eseguire graficamente le operazioni che stiamo per definire, senza cambiarne il risultato.

Vediamo ora come sono definite le operazioni fra vettori.

SOMMA DI VETTORI

Dati due vettori **A** e **B** come in fig. 1, definiamo somma $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ il vettore risultante **C** ottenuto tracciando una freccia con la coda nella coda di **A** e la punta nella punta di **B**.

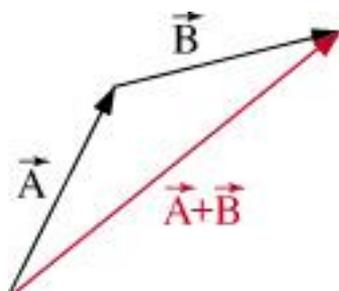


fig.1

Per fare ciò se i due vettori non sono consecutivi devo prima riportare il vettore **B** parallelamente a se stesso in modo che la sua coda coincida con la punta di **A**

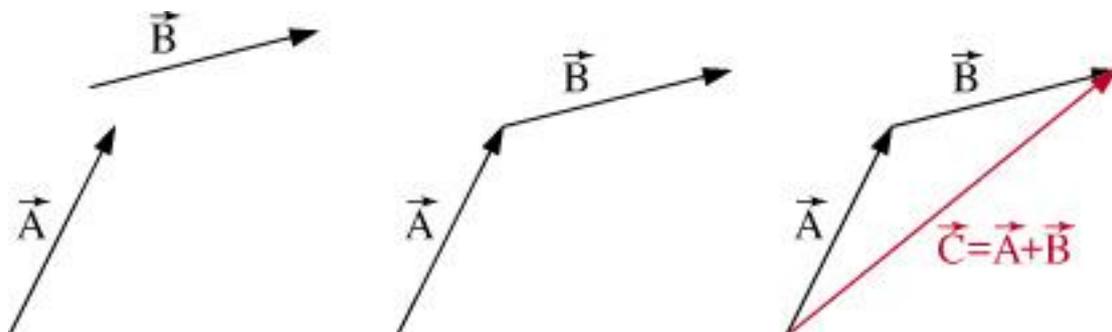


fig. 2

Possiamo ora definire anche la differenza di due vettori: questa equivale alla somma dei vettori **A** e $-\vec{B}$ (vedi fig. 3).

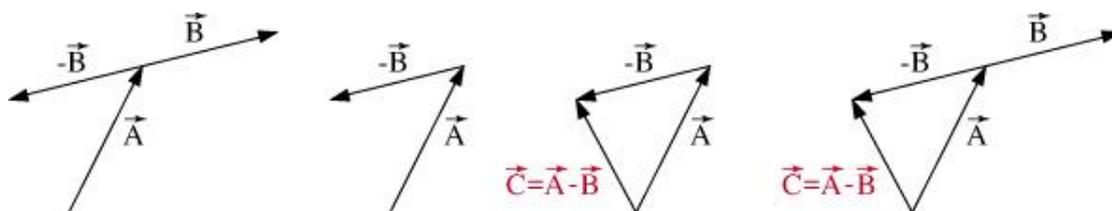


fig. 3

Questa **regola** di somma dei vettori è detta “**punta-coda**”.

Un'altra regola utile, che ovviamente dà lo stesso risultato, è la **regola del parallelogramma**: si tracciano i vettori **A** e **B** con le origini coincidenti. Si costruisce il parallelogramma di lati $|\mathbf{A}|$ e $|\mathbf{B}|$: la diagonale uscente dall'origine comune **O** rappresenta il vettore somma. La differenza è il vettore corrispondente all'altra diagonale, come mostra la figura 3, con verso opportuno a seconda che l'operazione da eseguire sia **A-B** o **B-A** .

La somma così definita è commutativa e associativa.

Definiamo quindi vettori tutti gli enti matematici rappresentabili mediante “freccie” che obbediscono alla regola di somma sopra definita.

Se poi vogliamo calcolare la lunghezza del vettore somma e gli angoli formati tra i vettori **A**, **B** e **C**, basterà ricorrere alle regole della trigonometria (vedi TRIGONOMETRIA) .

PRODOTTO DI UN VETTORE PER UNO SCALARE

Se pensiamo, ad esempio, di “moltiplicare per 2 un vettore”, ci immaginiamo un vettore di lunghezza doppia e direzione e verso identici al vettore di partenza: questo è ciò che si intende per moltiplicazione di un vettore per uno scalare (numero!). Dato dunque un vettore \mathbf{A} e uno scalare k , il vettore $\mathbf{S} = k\mathbf{A}$ risulta avere:

- modulo kA
- direzione identica alla direzione di \mathbf{A}
- verso concorde con \mathbf{A} se $k > 0$ e opposto ad \mathbf{A} se $k < 0$.

COMPONENTI CARTESIANE DI UN VETTORE

Limitiamoci per ora al caso piano: il caso tridimensionale verrà trattato in seguito come ovvia estensione di questo.

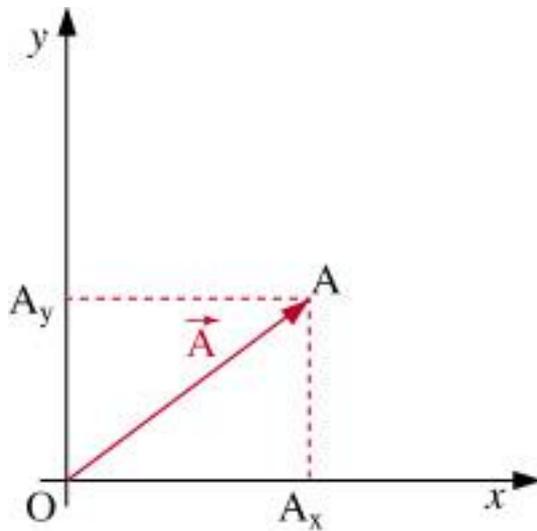
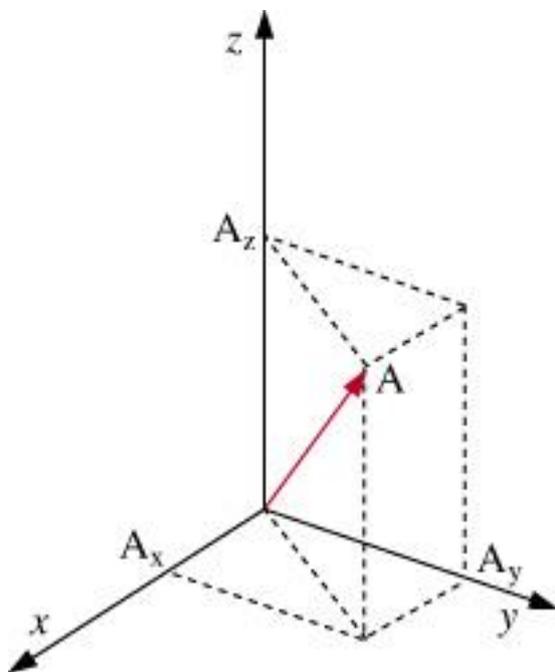


fig. 4

Consideriamo un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy (vedi figura 4) e un vettore \overrightarrow{OA} . Le componenti del vettore \overrightarrow{OA} rispetto al sistema di riferimento considerato sono le proiezioni del punto A : A_x ed A_y sui due assi cartesiani. Possiamo considerare dunque che il vettore \overrightarrow{OA} sia dato dalla somma (con la regola del parallelogramma) di due vettori $\overrightarrow{A_x}$ e $\overrightarrow{A_y}$ paralleli ai due assi. Il vettore $\overrightarrow{A_x}$ può essere considerato il

risultato del prodotto di uno scalare di lunghezza pari al modulo di \vec{A}_x per un vettore (\vec{u}_x) di lunghezza unitaria, direzione coincidente e verso concorde con l'asse x. Il vettore \vec{u}_x è chiamato **versore** dell'asse x. Analogamente, il vettore \vec{u}_y avrà lunghezza unitaria, direzione coincidente e verso concorde con l'asse y. Dunque possiamo scrivere: $\vec{OA} = A_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y$.

L'estensione al caso tridimensionale permette di scrivere il vettore A nella forma: $\vec{OA} = A_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y + A_z \vec{u}_z$ (fig. 5).



Facendo uso di questa rappresentazione, la regola di somma di vettori può essere data anche nella seguente forma:

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x) \vec{u}_x + (A_y + B_y) \vec{u}_y + (A_z + B_z) \vec{u}_z.$$

Conseguenze:

- a) tutti i vettori paralleli ad \vec{A} saranno del tipo: $kA_x \vec{u}_x + kA_y \vec{u}_y$ con $k \neq 0$
- b) tutti i vettori perpendicolari ad \vec{A} saranno del tipo: $-kA_y \vec{u}_x + kA_x \vec{u}_y$ con $k \neq 0$
(avranno cioè uguale modulo ma saranno ruotati di $+\pi/2$)

Passiamo ora a definire altre operazioni fra vettori: il prodotto scalare e il prodotto vettore.

PRODOTTO SCALARE

Dati due vettori \vec{A} e \vec{B} espressi mediante le loro componenti cartesiane, definiamo prodotto scalare dei vettori \vec{A} e \vec{B} e lo indichiamo col simbolo \cdot lo scalare

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Un altro modo possibile per calcolare il prodotto scalare di due vettori, quando se ne conoscano i moduli e l'angolo α formato tra essi è il seguente:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \alpha.$$

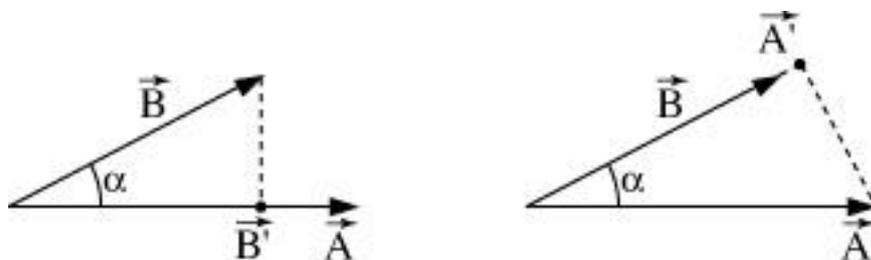


fig. 6

Dalla figura 6 si può notare che $|\vec{B}'| \cos \alpha$ rappresenta la proiezione di \vec{B} su \vec{A} (o viceversa, la proiezione di \vec{A} su \vec{B}). La definizione data si applica anche a vettori liberi, l'angolo α è quello che essi formano quando vengono trasportati parallelamente a sé stessi in modo da avere lo stesso punto iniziale.

Quindi il prodotto scalare è il prodotto della lunghezza di uno dei due vettori per la proiezione dell'altro sulla retta del primo.

Conseguenze della definizione di prodotto scalare:

a) il prodotto del vettore \vec{A} per se stesso è: $\vec{A} \cdot \vec{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$

b) l'angolo tra due vettori è dato da: $\cos \alpha = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|}$

c) il versore associato ad \vec{A} è dato da: $\vec{u}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{A_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}}$

Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà:

- a) e' commutativo : $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$.
- b) e' nullo se i due vettori sono perpendicolari fra loro ($\cos\alpha=0$), se \vec{A} o \vec{B} sono nulli
 $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} = 0$ (anche se l'angolo α in questo caso non è definito).
- c) e' distributivo rispetto alla somma: $\vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C})$
- d) $(\lambda\vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (\lambda\vec{B}) = \lambda(\vec{A} \cdot \vec{B})$

PRODOTTO VETTORE

Dati due vettori \vec{A} e \vec{B} formanti un angolo α , definiamo prodotto vettore di \vec{A} e \vec{B} e lo indichiamo col simbolo \times il vettore $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$: $|\vec{C}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin \alpha$, direzione di \vec{C} perpendicolare al piano contenente \vec{A} e \vec{B} , e verso come mostrato in figura 7: se \vec{A} e \vec{B} appartengono al piano xy di un sistema di riferimento cartesiano destrorso, \vec{C} è diretto lungo z : positivo se ruotando \vec{A} fino a sovrapporlo a \vec{B} percorrendo l'angolo di rotazione minimo, il verso di rotazione è antiorario, negativo in caso contrario.

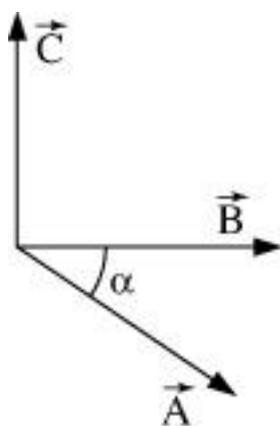


fig. 7

Se i vettori sono dati mediante le loro componenti cartesiane, il prodotto vettore può essere definito anche come:

$$\vec{C} = (A_y B_z - A_z B_y)\vec{u}_x + (A_z B_x - A_x B_z)\vec{u}_y + (A_x B_y - A_y B_x)\vec{u}_z$$

questa espressione coincide col risultato del calcolo del determinante della matrice così costruita:

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Il prodotto vettore gode delle seguenti proprietà:

a) e' anticommutativo: $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

b) e' nullo quando \vec{A} è parallelo a \vec{B} ($\alpha=0,\pi$, quindi $\sin\alpha=0$)

c) e' distributivo rispetto alla somma: $\vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C} = \vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C})$

d) $\lambda \vec{A} \times \vec{B} = \vec{A} \times \lambda \vec{B} = \lambda(\vec{A} \times \vec{B})$

Inoltre possiamo calcolare il “doppio prodotto vettore” come:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C})\vec{A}$$