Prof. Francesca Mantese
Università di Verona, 2018/2019
Corso di Laurea in Matematica Applicata

# Esercizi per il Corso di

## ALGEBRA LINEARE ED ELEMENTI DI GEOMETRIA

**Foglio 1**
19 ottobre 2018

1. Si dica quali dei seguenti insiemi $G$ dotati di operazione è un gruppo. In caso negativo si dica quali degli assiomi di gruppo non sono verificati

   (a) $G$ l'insieme dei numeri interi dispari. Per ogni $a, b \in G$ sia $a \star b = a + b$. (l'usuale somma tra numeri interi)

   (b) $G$ l'insieme di tutte le frazioni con numeratore e denominatore coprimi, e denominatore dispari. Per ogni $x, y \in G$ sia $x \star y = xy$ ( l'usuale prodotto tra frazioni)

   (c) $G$ l'insieme di tutte le frazioni con numeratore e denominatore coprimi, e denominatore dispari. Per ogni $x, y \in G$ sia $x \star y = x + y$ ( l'usuale somma tra frazioni)

   (d) Sia $X$ un insieme e sia $G = \{Y \mid Y \subseteq X\}$ l'insieme delle parti di $X$. Per ogni $Y, Z \in G$ sia $Y \star Z = Y \cup Z$

   *(4 punti)*

2. Sia $S_9$ il gruppo simmetrico dato da tutte le permutazioni $\{1, \dots, 9\} \to \{1, \dots, 9\}$.

   (a) si consideri $\sigma = (13587)$, $\tau = (234)$, $\rho = (1569)$. Si calcoli $\sigma \circ \tau$, $\tau \circ \sigma$, e $\sigma \circ \tau \circ \rho$

   (b) Senza calcoli espliciti, si dica se $\tau\rho = \rho\tau$ e perché.

   (c) Si scriva la permutazione

   $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 8 & 6 & 4 & 1 & 5 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

   come prodotto di cicli disgiunti, come prodotto di trasposizioni e si decida se $\sigma$ è pari o dispari. Si determini l'ordine di $\sigma$. Si trovi $\sigma^{-1}$.

   *(6 punti)*

3. Si consideri il gruppo $S_{11}$.

   (a) Sia $G = \{\sigma | \sigma \in S_{11},\ \sigma(3) = 3\}$. Si provi che $G$ è un sottogruppo di $S_{11}$.

   (b) Sia $H = \{\sigma | \sigma \in S_{11},\ \sigma(9) = 2\}$. Si dica se $H$ è un sottogruppo di $S_{11}$.

   *(6 punti)*

4. Si trovino tutti i sottogruppi non banali di $S_3$ *(4 punti)*

5. Sia $G$ un gruppo. Si dimostri che $G$ è abeliano se e solo se l'applicazione $\varphi : G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$, è un isomorfismo. *(6 punti)*

6. Sia $\pi_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, l'applicazione definita da $\pi_{a,b}(x) = ax+b$. Sia $G = \{\pi_{a,b} | a \neq 0\}$.
   (a) Si dimostri che $G$ è un gruppo rispetto alla composizione e si determini l'espressione di $\pi_{a,b} \circ \pi_{c,d}$. È un gruppo abeliano?
   (b) Sia $M = \{\pi_{a,b} | a = 1,\ b \in \mathbb{Z}\}$. Si verifichi che $M$ è un sottogruppo di $G$.
   (c) Si dimostri che $M$ è un gruppo ciclico infinito generato da $\pi_{1,1}$ $(**)$
   (d) si dia esplicitamente un isomorfismo tra $M$ e $\mathbb{Z}$ $(**)$

*(6 punti)*

*(**)*

Gli esercizi $(**)$ sono da considerarsi difficili, ma particolarmente stimolanti. Il loro svolgimento comporta ulteriori punti al foglio di esercizi

**Consegna: venerdiì 26 ottobre**