

Esercizi per il Corso di
ALGEBRA LINEARE ED ELEMENTI DI GEOMETRIA

Foglio 5
7 Dicembre 2018

1. Si considerino i vettori in \mathbb{C}^4

$$v_1 = [0 \ 1 \ 0 \ -3 \ 1]^T, v_2 = [1 \ -3 \ -6 \ 2]^T, v_3 = [-1 \ 1 \ 0 \ 0]^T, v_4 = [0 \ -3 \ -9 \ 3]^T$$

- (a) L'insieme $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è un insieme linearmente dipendente o indipendente?
(b) Trovare il sottospazio generato dall'insieme $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.
(c) Trovare una base di tale sottospazio

(6 punti)

2. Si consideri lo spazio vettoriale

$$W = \{[x_1 \ x_2 \ x_3]^T \in \mathbb{C}^3 \mid x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$$

- (a) Trovare una base di W .
(b) Trovare la dimensione di W .
(c) Dimostrare che W coincide con lo spazio generato dai vettori $\{v_1 = [-1 \ 1 \ 1]^T, v_2 = [0 \ 2 \ 1]^T, v_3 = [-3 \ -1 \ 1]^T\}$

(6 punti)

3. Si considerino i sottospazi di \mathbb{C}^4

$$W_1 = \left\{ [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T \in \mathbb{C}^4 \mid \begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \right\} \quad W_2 = \langle [1, 0, 1, 2]^T, [1, 1, 0, 0]^T \rangle .$$

Si trovino $W_1 + W_2$ e $W_1 \cap W_2$

(6 punti)

4. (a) Si trovi una base di \mathbb{C}^4 contenente i vettori $v_1 = [-1 \ 1 \ 1 \ 0]^T$ e $v_2 = [0 \ 2 \ 1 \ 1]^T$
(b) Esiste una base di \mathbb{C}^4 contenente i vettori v_1, v_2 e $v_3 = 2v_1 - v_2$?

(6 punti)

5. Sia A una matrice $m \times n$ a coefficienti in \mathbb{C} . Si ricordi che lo spazio delle colonne di A è definito come l'insieme dei vettori $y \in \mathbb{C}^m$ tale che il sistema $Ax = y$ ammette soluzioni. Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

- (a) Si dimostri che lo spazio delle colonne di A è un sottospazio vettoriale di \mathbb{C}^3 .
(b) Si trovi una base di tale spazio.

(6 punti)