Foglio di esercizi su spazi vettoriali, sottospazi, generatori e basi

Soluzioni

8 novembre 2009

Esercizio 1 (Punti 8)**.** Verificare che il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$

$$W = \left\{ [x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^3 | \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \right\}$$

è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ e che $W =< (1,1,1)^T >$.

Soluzione: Per verificare che è un sottospazio si dimostrano le proprietà di chiusura (i) e (ii) della definizione, oppure si usa il fatto che $W = N(A)$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}$$

e sappiamo che $N(A) = \mathrm{Ker} f_A$ è sempre un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

Per trovare una base di $W = N(A)$ risolviamo il sistema lineare $Ax = 0$: otteniamo con (EG) che $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, e quindi $N(A) =< (1,1,1)^T >$.

Esercizio 2 (Punti 8)**.** Si consideri il sottospazio di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$W = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

1. Determinare $\dim W$ e una base per W.
2. Quindi completare tale base ad una base di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Soluzione:

1. Per calcolare la dimensione di W possiamo scrivere le quattro matrici A, B, C, D come vettori $a, b, c, d \in \mathbb{R}^4$ e calcolare il rango della matrice con le colonne a, b, c, d:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 9 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi dim$W = 2$, e poiché le colonne dominanti sono le prime due, concludiamo che le prime due matrici A e B formano una base di W.

2. Sappiamo che $\{A, B, E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ è un insieme di generatori di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (dove E_{ij} denota la matrice 2×2 con 1 nell'entrata i, j e 0 altrove).

Abbiamo inoltre

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_{12} + E_{22}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = -E_{11} + 3E_{21} + 2A + 2E_{12}$$

da cui deduciamo che E_{22} è combinazione lineare di A e E_{12}, e che E_{21} è combinazione lineare di A, B, E_{11}, E_{12}. Quindi anche $\mathcal{G} = \{A, B, E_{11}, E_{12}\}$ è un insieme di generatori di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, e poiché dim$M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$, concludiamo che $\mathcal{G}$ è un insieme di generatori "minimale", quindi una base di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Esercizio 3 (Punti 8). Si considerino i sottoinsiemi U e V di $\mathbb{R}^3$, rispettivamente formati dai vettori $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ tali che

$$\Sigma_U = \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \Sigma_V = \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

1. Verificare che sia U che V sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$.
2. Determinarne la dimensione e una base di U e V.
3. Determinare la dimensione e una base dell'intersezione $U \cap V$.
4. $\mathbb{R}^3$ è somma diretta di U e V?

Soluzione:

1. Si procede come nell'esercizio 1: si dimostrano le proprietà di chiusura (i) e (ii) della definizione, oppure si usa il fatto che $U = N(A)$ e $V = N(B)$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}.$$

2. Poiché le due matrici hanno rango 2, abbiamo $\dim U = 3 - \mathrm{rk}A = 1$ e analogamente $\dim V = 1$. La base si trova risolvendo il sistema lineare $Ax = 0$ (rispettivamente $Bx = 0$). Si ottiene $U =< (-1,-1,1)^T >$ e $V =< (-1,1,1)^T >$.

3. I vettori $u = (-1,-1,1)^T$ e $v = (-1,1,1)^T$ formano un insieme linearmente indipendente, dunque $U \cap V = 0$ (si vede direttamente, poiché per ogni vettore di forma $\alpha u = \beta v \in U \cap V$ deve valere $\alpha = \beta = 0$, oppure si vede applicando la formula di Grassmann poiché $\{u, v\}$ è una base di $U + V$ che ha dunque dimensione $2 = \dim U + \dim V$).

4. no, poiché $\dim(U + V) = 2 < \dim \mathbb{R}^3$.

Esercizio 4 (Punti 6). ☻

1. $V = U \oplus W$ se e solo se ogni $v \in V$ può essere scritto in uno e un solo modo come $v = u + w$ con $u \in U$ e $w \in W$.
2. Sia $V = U \oplus W$. Se $\mathcal{B}_U$ è una base di U e $\mathcal{B}_W$ è una base di W, allora $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ è una base di V.

Soluzione:

(1) $\Rightarrow$: Ogni $v \in V = U + V$ può essere scritto come $v = u + w$ con $u \in U$ e $w \in W$. Verifichiamo l'unicità: se $v = u + w = u' + w'$, allora $u - u' = w - w' \in U \cap W = 0$, quindi $u - u' = w - w' = 0$ e $u = u'$, $w = w'$.

$\Leftarrow$: Certamente $V = U + W$. Dimostriamo $U \cap W = 0$: se $v \in U \cap W$, allora $v = v + 0_W = 0_U + v$ e per l'unicità della rappresentazione segue $v = 0$.

(2) Abbiamo già dimostrato a lezione che $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ è un insieme di generatori di V. Poiché $\dim V = \dim U + \dim W$, sappiamo inoltre che il numero di vettori di $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ è esattamente la dimensione di V. Allora $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ è un insieme di generatori "minimale", quindi una base di V. (Altrimenti si potrebbe anche verificare direttamente l'indipendenza lineare di $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$.)

N.B.
Il simbolo ☻ denota esercizi giudicati **difficile**.