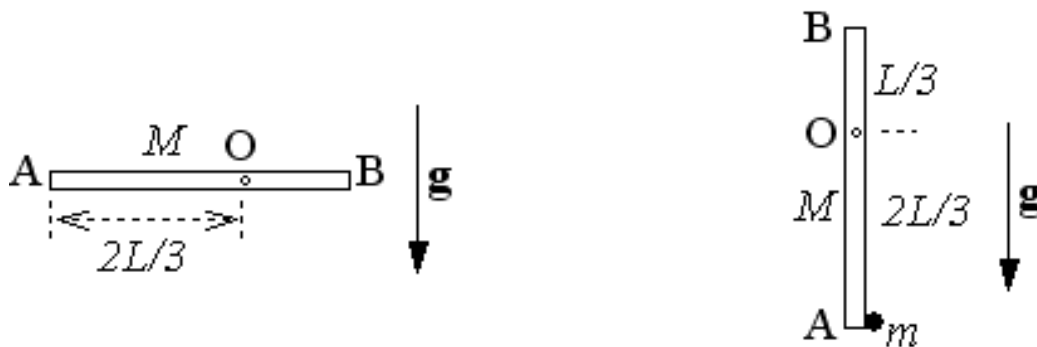


## Problemi aggiuntivi sulla Dinamica dei corpi rigidi:

### A) Urti tra punti materiali e corpi rigidi

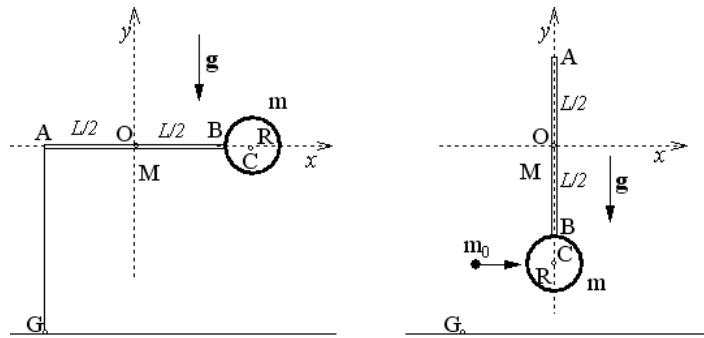
**Problema n.1:** Un'asta AB sottile rigida omogenea di massa  $M = 2\text{ kg}$  e lunghezza  $L = 60\text{ cm}$  è vincolata a ruotare senza incontrare attrito alcuno nel piano verticale intorno ad un asse orizzontale fisso passante per il punto O che dista  $d = L/3$  dal suo estremo B. L'asta, inizialmente in quiete in posizione orizzontale, viene lasciata libera di ruotare sotto l'azione della sua forza peso. Quando raggiunge la configurazione verticale, essa urta con l'estremo inferiore A una particella, istantaneamente in quiete e non soggetta a vincoli, di massa  $m = 0.1\text{ kg}$  che rimane attaccata all'estremità dell'asta. Determinare:

- l'accelerazione angolare  $\alpha_0$  dell'asta immediatamente dopo che essa è stata lasciata libera di ruotare;
- il modulo della velocità angolare dell'asta subito prima dell'urto con la particella;
- il modulo della velocità angolare dell'asta immediatamente dopo l'urto;
- l'energia dissipata nell'urto;
- l'angolo  $\theta_M$  di cui ruota il sistema dopo l'urto prima di invertire il suo verso di rotazione;
- la reazione  $\mathbf{R}_O$  del vincolo in O nell'istante in cui il sistema inverte in verso di rotazione.



**Problema n. 2:** Un disco, sottile e omogeneo, di massa  $m = 1.5\text{ kg}$  e raggio  $R = 0.2\text{ m}$  è ancorato solidalmente all'estremità B di un'asta AB, pure sottile e omogenea, di massa  $M = 3\text{ kg}$  e di lunghezza  $L = 0.8\text{ m}$ , in modo tale che la distanza che separa il centro C del disco dal punto medio O dell'asta sia pari a  $R+L/2$ . Il sistema rigido asta più disco può ruotare nel piano verticale attorno ad un perno posto in O dell'asta. Inizialmente il sistema è mantenuto in quiete con l'asta posta in configurazione orizzontale, ad un'altezza dal suolo maggiore di  $2R+L/2$ , tramite una fune disposta verticalmente, che collega l'estremità A dell'asta ad un gancio G, posto al suolo. All'istante  $t = 0$ , la fune si rompe e il sistema si mette in rotazione nel piano verticale. Quando esso raggiunge la configurazione verticale viene colpito da un proiettile massa  $m_0 = 0.1\text{ kg}$  che sta viaggiando con velocità istantanea di modulo  $v = 64.5\text{ ms}^{-1}$  nella direzione orizzontale passante per il centro di massa C del disco. Assumendo che nell'urto il proiettile si conficchi in un tempo trascurabile nel centro C del disco. Determinare:

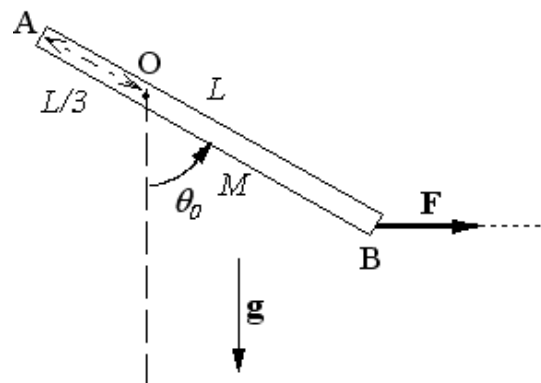
- la tensione iniziale della fune ancorata all'estremità A dell'asta;
- le reazioni  $\mathbf{R}_O$  iniziale del perno in O;
- il modulo della reazione del perno in O immediatamente prima dell'urto;
- la velocità angolare  $\omega$  del sistema subito dopo l'urto;
- l'ampiezza  $\theta_M$  dell'angolo formato dall'asta con l'asse verticale passante per il punto O in corrispondenza all'istante di arresto del sistema durante il moto successivo all'urto.



**B) Applicazione delle Leggi Cardinali e dei teoremi validi per i sistemi di particelle.**

**Problema n. 3:** Un'asta rigida, sottile, omogenea, di massa  $M = 6 \text{ kg}$  e lunghezza  $L = 1.5 \text{ m}$  è vincolata a ruotare nel piano verticale senza incontrare attrito alcuno attorno ad un asse orizzontale fisso passante per il O punto dell'asta che dista  $L/3$  da suo estremo superiore, mentre il suo estremo inferiore è spostato lateralmente rispetto alla verticale per O, essendo collegato a una fune ideale tirata orizzontalmente da una forza  $F$ . L'asta è mantenuta tramite questa forze in equilibrio statico, nella configurazione in cui essa forma un angolo  $\theta_0 = \pi/3 \text{ rad}$  con la direzione verticale. Determinare:

- a) il modulo  $F$  della tensione della fune;
  - b) la reazione  $\mathbf{R}_O$  esercitata sull'asta dall'asse di sospensione passante per il punto O;
- Supponendo che all'istante  $t = 0$  la fune si spezzi, determinare con riferimento al moto successivo dell'asta nel piano verticale:
- c) l'accelerazione angolare  $\alpha$  dell'asta, in funzione dell'angolo  $\theta$  formato con la verticale;
  - d) la velocità angolare di rotazione dell'asta in funzione dell'angolo  $\theta$ ;
  - e) l'energia cinetica interna  $E_k$  dell'asta quando si trova in configurazione verticale;
  - f) la reazione sviluppata dalla cerniera in O quando la trave raggiunge tale configurazione.

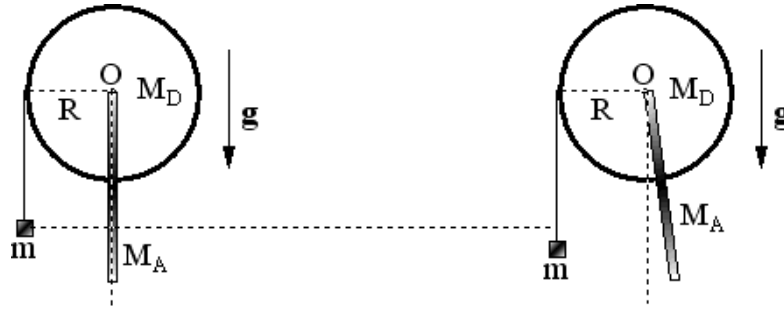


**Problema n. 4:** Un sistema rigido è costituito da un disco omogeneo di massa  $M_D = 1 \text{ kg}$  e raggio  $R = 20 \text{ cm}$  e da un'asta rigida sottile omogenea di massa  $M_A = 2 \text{ kg}$  e lunghezza  $L = 40 \text{ cm}$  solidale al disco e disposta nel piano che lo contiene con un'estremità imperniata nel centro O del disco. Il sistema rigido può ruotare senza attrito nel piano verticale attorno ad un asse orizzontale passante per il centro O del disco, ed è inizialmente in quiete nella sua configurazione di equilibrio stabile. Un corpo puntiforme di massa  $m = 0.2 \text{ kg}$  pende da una fune ideale (inestensibile e di massa trascurabile) avvolta attorno al disco, ed è mantenuto inizialmente in quiete. All'istante  $t = 0$ , il corpo è lasciato cadere sotto l'azione della sua forza peso e mette in rotazione il sistema rigido tramite la fune che può srotolarsi senza slittare sul bordo del disco. Determinare con riferimento al moto oscillatorio del sistema complessivo, costituito dal disco, dall'asta e dal corpo puntiforme:

- a) il diagramma delle forze esterne agenti sul sistema;
- b) l'equazione del moto rotazionale del sistema rigido;

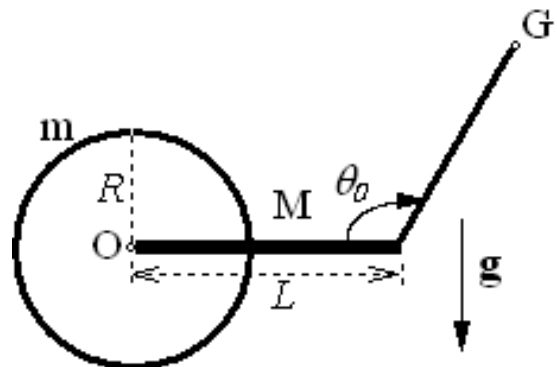
- c) la posizione di equilibrio del sistema rigido;
- d) il periodo di oscillazione attorno alla sua posizione di equilibrio;
- e) la quota massima raggiunta dal centro di massa dell'asta durante il moto oscillatorio;
- f) la velocità massima raggiunta dal corpo puntiforme.

Suggerimento: si consiglia di usare come variabile di posizione l'angolo  $\theta$  formato dall'asta con la verticale.



**Problema n. 5:** Un anello sottile, omogeneo di raggio  $R = 0.3$  m e massa  $m = 6$  kg è vincolato a ruotare, senza attrito, nel piano verticale intorno ad un asse orizzontale fisso passante per il suo centro O. Esso infatti è solidale ad un'asta sottile, omogenea di lunghezza  $L = 2R$  e massa  $M = 12$  kg avente un'estremità incernierata all'assedi rotazione passante per lo stesso punto O. Inizialmente il sistema è mantenuto in condizioni di equilibrio statico, con l'asta disposta orizzontalmente, tramite una fune fissata all'estremità non-incernierata dell'asta, e ancorata ad un gancio G fisso nel piano verticale, in modo da formare un angolo  $\theta_0 = 2\pi/3$  rad con l'asta. All'istante  $t = 0$  la fune si rompe e il sistema rigido formato dall'anello e dall'asta, non più in equilibrio, si mette in rotazione nel piano verticale. Determinare:

- a) la reazione  $\mathbf{R}_G$  del gancio G;
- b) il modulo della reazione  $\mathbf{R}_O$  della cerniera in O, nelle condizioni iniziali;
- c) la distanza del centro di massa del sistema dall'asse di rotazione;
- d) la velocità angolare del sistema in corrispondenza della sua configurazione di equilibrio stabile;
- e) la reazione della cerniera in O quando il sistema raggiunge la configurazione di cui al punto d);
- f) il periodo delle piccole oscillazioni del sistema intorno alla configurazione di equilibrio stabile.

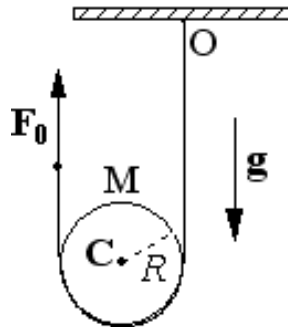


**Problema n. 6:** Una carrucola, assimilabile a un disco rigido, sottile e omogeneo, di massa  $M = 5$  kg e raggio  $R = 0.2$  m, è sorretta da un nastro inestensibile e di massa trascurabile che passa nella sua gola: i tratti di nastro non a contatto col disco sono disposti verticalmente mentre l'asse del disco è orizzontale. Un'estremità del nastro è fissata ad un sostegno fisso O, sull'altra estremità è applicata una forza  $\mathbf{F}$  diretta verso l'alto. Assumendo che l'attrito tra il nastro e la gola della carrucola sia trascurabile, determinare:

- a) il diagramma delle forze applicate alla carrucola;

- b) l'intensità della forza  $\mathbf{F}_0$  necessaria affinché la carrucola si trovi in equilibrio statico, e corrispondentemente, il modulo della tensione  $\mathbf{T}_1$  del tratto di nastro al quale è applicata la forza  $\mathbf{F}$  e quello della tensione  $\mathbf{T}_2$  del tratto di nastro fissato al sostegno fisso  $O$ ;
- c) il modulo  $a_0$  dell'accelerazione della carrucola e i moduli delle tensioni  $T_1$  e  $T_2$  del nastro se  $\mathbf{F}_0 = -M\mathbf{g}$ .

Si risponda, infine, alla domanda di cui al punto c) qui sopra nell'ipotesi che tra il nastro e la gola della carrucola ci sia attrito e che, a causa di questo, la carrucola salga rotolando e senza scivolare lungo il nastro.

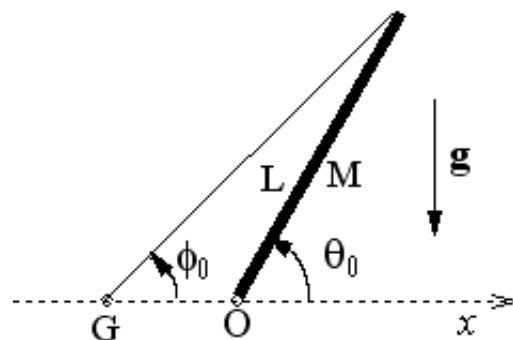


**Problema n. 7:** Un puntone, assimilabile ad un'asta sottile e rigida, di massa  $M = 120 \text{ kg}$  e lunghezza  $L = 1.8 \text{ m}$  è mantenuto in equilibrio nel piano verticale  $xy$  tramite una fune ideale (inestensibile e di massa trascurabile) collegata all'estremità libera del puntone come indicato in figura 2, dove  $\theta_0 = \pi/3$  e  $\phi_0 = \pi/4$ . Il puntone ha l'altra estremità fissata ad un punto  $O$  del piano orizzontale tramite una cerniera liscia. Determinare:

- (a) il diagramma delle forze agenti sul puntone;  
 (b) la tensione  $\mathbf{T}$  della fune;  
 (c) la reazione  $\mathbf{R}$  esercitata dalla cerniera sul puntone.

Supponendo che improvvisamente la fune si rompa, e che il puntone si metta in rotazione attorno all'asse orizzontale passante per  $O$ , calcolare:

- (d) l'accelerazione iniziale  $\mathbf{a}_{CM}$  del centro di massa del puntone;  
 (e) la velocità angolare  $\omega(\theta)$  del puntone in funzione dell'angolo  $\theta$  da esso formato con l'asse orizzontale;  
 (f) l'energia cinetica  $E_{CM}$  del centro di massa del puntone quando esso assume la configurazione orizzontale;  
 (g) la reazione  $\mathbf{R}$  della cerniera in corrispondenza di tale configurazione.



**N.B.:** Le grandezze vettoriali vanno espresse in termini di intensità, direzione e verso o, in alternativa, in termini delle loro componenti nell'ambito di un'opportuna rappresentazione!