Foglio di esercizi su applicazioni lineari e matrici, cambiamenti di base

Sansonetto Nicola*

Esercizio 1 (Punti 8)**.** Le matrici quadrate reali R $n \times n$ tali che $det(R) = 1$ (determinante unitario) e che $R^{-1} = R^T$ (l'inversa coincide con la trasposta) si chiamano matrici ortogonali speciali $n \times n$. Dimostrare che l'insieme delle matrici ortogonali speciali $n \times n$ forma un gruppo rispetto alla moltiplicazione righe per colonne.

Sol. Le matrici reali $n \times n$ con determinante uguale a 1 e tali che $RR^T = \mathrm{Id}_n$ sono dette matrici ortogonali speciali. In primo luogo mostriamo che il prodotto di due matrici ortogonali speciali è ancora una matrice ortogonale speciale, infatti siano R e S due matrici ortogonali speciali, allora $(RS)(RS)^T = RSS^TR^T = \mathrm{Id}_n$, inoltre $\det(RS) = \det(R)\det(S) = \mathrm{Id}_n$. La matrice identità è ovviamente una matrice ortogonale speciale, infatti essa coincide con la sua trasposta e con la sua inversa e ha determinante uno. La proprietà associativa è immediata e discende dalla proprietà associativa del prodotto righe per colonne. Per il determiannte sia ha, date R, S, T matrici ortogonali speciali, $\det((RS)T) = \det(RS)\det(T) = \det(R)\det(S)\det(T) = 1$. Sia ora R una matrice ortogonale speciale, mostriamo che anche la sua inversa R^{-1} è una matrice ortogonale speciale, $R^{-1}R^T = (RR^T)^{-T} = \mathrm{Id}_n$, inoltre $\det(R^{-1}) = (\det(R))^{-1} = \mathrm{Id}_n$.

Esercizio 2 (Punti 8)**.** Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $f(x, y, z) = [x + y, x + y, z]^T$.

1. Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica.
2. Determinare $Ker(f)$ e $Im(f)$.
3. Mostrare che l'insieme $\mathcal{B} = \{b_1 := [1, 1, -1]^T,\ b_2 := [1, 1, 0]^T,\ b_3 := [1, -1, 0]^T\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
4. Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica nel dominio e alla base $\mathcal{B}$ nel codominio.

Sol. 1. La matrice associata a f rispetto alla base canonica è

$$T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Il nucleo di f è dato dall'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}}\underline{x} = \underline{0}$, ossia $\ker f =< [-1, 1, 0]^T >$.
   Per il teorema nullità+rango sia ha che l'immagine ha dimensione 2 ed è semplice osservare che $\mathrm{Im} f =< [1, 1, 0]^T,\ [0, 0, 1]^T >$.

3. Per mostrare che $\mathcal{B}$ definisce una base di $\mathbb{R}^3$ basta mostrare che la matrice $M_{\mathcal{B}}$ che ha per colonne i vettori $b_1,\ b_2,\ b_3$ ha rango 3. Infatti usando l'eliminazione di Gauss (o calcolando il determinante) si ricava che

$$\mathrm{rank} M_{\mathcal{B}} = \mathrm{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3$$

4. La matrice associata a f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ nel dominio e alla base $\mathcal{B}$ nel codominio è $T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}}$, in cui $M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}$ è la matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base $\mathcal{B}$, che è l'inversa della matrice $M_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$ che ha per colonne i vettori della base $\mathcal{B}$:

$$M_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*e-mail: nicola.sansonetto@gmail.com

e quindi

$$M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = M_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi la matrice associata a f rispetto alla base canonica nel dominio e a alla base $\mathcal{B}$ nel codominio è

$$T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3 (Punti 8)**.** Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $f_\alpha(x, y, z) = [-x + (2-\alpha)y + z,\ x - y + z,\ x - y + (4-\alpha)z]^T$.

1. Scrivere la matrice associata a f_α rispetto alla base canonica su dominio e codominio.
2. Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ f_α è iniettiva.
3. Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ f_α è suriettiva.
4. Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il vettore $[1, 1, 1]^T \in \mathrm{Im}(f_\alpha)$.
5. Determinare $\ker(f_1)$.
6. Costruire, se possibile, un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f_0)$.
7. Costruire, se possibile, un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\ker(h) = \ker(f_1)$.

Sol. 1. La matrice associata a f_α rispetto alla base canonica su dominio e codominio è

$$T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}}[\alpha] = \begin{bmatrix} -1 & 2-\alpha & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 4-\alpha \end{bmatrix}$$

2. e 3. Rispondiamo assieme alle domande 2. e 3. usando il teorema nullità+rango. Infatti f_α è iniettiva se e solo se è suriettiva, essendo f_α un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in sè. Ci basta sapere, quindi, per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il rango della matrice $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}}[\alpha]$ è 3. Per far ciò conviene determinare per quali valori di α il determinante di $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}}[\alpha]$ sia non nullo. Ora $\det T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}}[\alpha] = 3$ se e solo se $\det(T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}})[\alpha] = -\alpha^2 + 4\alpha - 3 = 0$ cioè per $\alpha = 1$ oppure $\alpha = 3$. Quindi f_α è iniettiva e suriettiva per $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq 3$.

4. Osserviamo che $[1, 1, 1]^T \in \mathrm{Im}(f_\alpha)$ per $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq 3$. È semplice ora osservare che per $\alpha = 1$ $[1, 1, 1]^T \notin \mathrm{Im}(f_1)$, poiché il sistema $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}}[1]\underline{x} = [1, 1, 1]^T$ non ammette soluzione. Invece $[1, 1, 1]^T \in \mathrm{Im}(f_3)$.

5. Il nucleo di f_1 è dato dall'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}}[1]\underline{x} = \underline{0}$, cioè $\ker f_1 =< [1, 1, 0]^T >$.

6. Ricordiamo che per $\alpha = 0$ f_α è suriettiva e quindi $\dim \mathrm{Im} f_0 = 3$, per il teorema nullità + rango non può quindi esistere un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f_0)$.

7. Abbiamo visto che $\ker(f_1) =< [1, 1, 0]^T >$, cerchiamo quindi un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\ker(h) =< [1, 1, 0]^T >$. Per il teorema nullità + rango una siffatta applicazione lineare certamente esiste. Una tale h è ad esempio $h(x, y) = (x - y, x - y, x - y)$.

Esercizio 4 (Punti 6)**.** ☻ Si consideri al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la famiglia di applicazioni lineari $T_\alpha : \mathbb{R}^3 \longrightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definite da $T_\alpha(x, y, z) = \begin{bmatrix} x + \alpha y & 0 \\ z & x - \alpha y \end{bmatrix}$.

1. Scrivere la matrice associata a T_α rispetto alle basi canoniche degli spazi in questione.
2. Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $Ker(T_\alpha)$ e $Im(T_\alpha)$.

3. Data la matrice $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, determinare la preimmagine di B relativa a T_α.

4. Posto $\alpha = 1$ e definita la matrice $B_\mu = \begin{bmatrix} 1 & \mu \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, determinare la preimmagine di B_μ rispetto a T_1, al variare di $\mu \in \mathbb{R}$.

Sol.

1. La matrice associata a T_α rispetto alle basi canoniche degli spazi in questione è

$$T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}}[\alpha] = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

in cui si è identificato $M_2(\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^4$.

2. $\ker T_\alpha$ è dato dall'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}}[\alpha]\underline{x} = \underline{0}$. Si ricava che se $\alpha \neq 0$ allora T_α è iniettiva, cioè $\ker T_\alpha = \underline{0}$. Se invece $\alpha = 0$ $\ker T_0$ è lo spazio generato da $[0, 1, 0]^T$.

   Per l'immagine di T_α dobbiamo dire per quali α il generico elemento di $M_2(\mathbb{R})$ sta in $\mathrm{Im}T_\alpha$. Si hanno due casi, se $\alpha \neq 0$ allora il generico vettore di $\mathrm{Im}T_\alpha$ è

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}$$

   con $a, b, c \in \mathbb{R}$, cioè $\dim \mathrm{Im}T_\alpha = 3$. Se $\alpha = 0$, invece il generico vettore di $\mathrm{Im}T_0$ è

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix}$$

   con $a, b \in \mathbb{R}$, cioè $\dim \mathrm{Im}T_0 = 2$.

3. Dobbiamo determinare le soluzioni, al variare di α, del sistema lineare $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}}[alpha]\underline{x} = [1, 0, 1, 0]^T$. Se $\alpha = 0$ $B \notin \mathrm{Im}T_0$ (ovvio da sopra). Se $\alpha \neq 0$ allora $T_\alpha^{\leftarrow}(B) = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2\alpha}, 1]^T$.

4. Ovviamente se $\mu \neq 0$ B_μ non è immagine di alcun elemento di $\mathbb{R}^3$. Se invece $\mu = 0$ ritorniamo ad uno deo casi precedenti, infatti $B_0 = B$ e $B \in \mathrm{Im}T_\alpha$ per $\alpha \neq 0$, in particolare quindi per $\alpha = 1$ e $T_1^{\leftarrow}(B_0) = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1]^T$.

N.B.
Il simbolo ☻ denota esercizi giudicati **difficile**.