

ALGEBRA

Corso di Laurea in Matematica Applicata
Anno accademico 2014-2015

Lidia Angeleri, Francesca Mantese

Obiettivo 1

Data un'equazione di forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

con coefficienti a_0, \dots, a_n in un campo K ,

costruire un'**estensione**

$$K \subset F$$

nella quale l'equazione abbia soluzione.

Obiettivo 1

Prototipo: $x^2 + 1 = 0$ sul campo \mathbb{R} con l'estensione $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Costruzione:

- l'anello dei polinomi $\mathbb{R}[x]$
- l'anello quoziente $\mathbb{C} = \mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$

Obiettivo 2

Studiare estensioni di campi usando la teoria dei gruppi
(e viceversa):

ad ogni estensione $K \subset F$ assegnamo un gruppo

$$G = \text{Gal}(F/K)$$

detto **gruppo di Galois**.

Obiettivo 2

Teorema Fondamentale della Teoria di Galois:

Sia $K \subset F$ un'estensione finita, normale e separabile e sia $G = \text{Gal}(F/K)$ il suo gruppo di Galois.

Allora esiste una corrispondenza biunivoca

$\{ \text{i campi intermedi } K \subset L \subset F \} \rightarrow \{ \text{i sottogruppi } H \leq G \}$

Obiettivo 3

Risolubilità per radicali: Gli zeri di un polinomio

$$f = x^2 + a_1 x + a_0$$

di grado 2 su \mathbb{Q} si determinano con una formula in cui intervengono solo le quattro operazioni e radici quadrate:

$$\alpha_1 = -\frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}, \quad \alpha_2 = -\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}$$

Obiettivo 3

Formule analoghe si hanno per i polinomi di grado 3 e 4.

Vedremo che ciò non vale per i polinomi di grado ≥ 5
(Teorema di Abel - Ruffini).

Conseguenze

Si dimostra che noti problemi classici **non** hanno soluzione.

Le seguenti costruzioni con riga e compasso sono **impossibili**:

- la quadratura del cerchio,
- la duplicazione del cubo,
- la trisezione dell'angolo.

Programma del Corso

- **Gruppi.** Sottogruppi, laterali, il gruppo quoziente. Gruppi ciclici. Il gruppo simmetrico. Gruppi risolubili.
- **Anelli.** Ideali. Omomorfismi. Domini a ideali principali, domini a fattorizzazione unica, anelli euclidei.
- **Polinomi.** L'anello dei polinomi. Polinomi irriducibili.
- **Campi.** Estensioni algebriche. Il campo di riducibilità completa di un polinomio.
- **Teoria di Galois.** Estensioni normali, estensioni separabili. Teorema Fondamentale della Teoria di Galois.
- **Applicazioni della Teoria di Galois.** Risolubilità per radicali. Costruzioni con riga e compasso.

Organizzazione del Corso

Filo rosso: sulla pagina del corso verrà pubblicato un diario delle lezioni con aggiornamento settimanale.

Bibliografia:

- S. BOSCH, *Algebra*, Springer, Unitext 2003.
- I.N.HERSTEIN, *Algebra*, Editori Riuniti 2003.
- J.P.TIGNOL, *Galois' Theory of Algebraic Equations*. World Scientific 2001.
- J.DERBYSHIRE, *Unknown quantity. A real and imaginary history of algebra*. Plume 2006.

Organizzazione del Corso

Esercizi: le lezioni sono affiancate da esercitazioni che preparano alla prova scritta.

Gli esercizi vengono

- assegnati settimanalmente (tutti i mercoledì)
- **corretti individualmente** da un tutore
- discussi durante le ore di esercitazione a martedì alterni (con inizio martedì 14 ottobre), ore 14:30 - 16:30.

Un buon punteggio negli esercizi da luogo a un bonus per l'esame.

L'esame

consiste in una prova scritta. Il voto conseguito nella prova scritta può essere migliorato attraverso il voto ottenuto per lo svolgimento degli esercizi e / o attraverso una prova orale facoltativa. Per potersi presentare all'orale è necessario aver superato la prova scritta.

A metà semestre si terrà una **prova parziale** sugli argomenti della prima parte del corso. Gli studenti che avranno superato la prova parziale avranno la possibilità (solo durante il primo appello di febbraio) di completare la prova scritta svolgendo soltanto la parte riguardante gli argomenti della seconda metà del corso.