Foglio di esercizi su spazi vettoriali, sottospazi, generatori e basi

Sansonetto Nicola*

Esercizio 1 (Punti 8)**.** Verificare che il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$

$$W = \left\{ [x_1, x_2, x_3]^T \in \mathbb{R}^3 | \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \right\}$$

è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ e che $W =< (1,1,1)^T >$.

Esercizio 2 (Punti 8)**.** Si consideri il sottospazio di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$W = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

1. Determinare $\dim W$ e una base per W.
2. Quindi completare tale base ad una base di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Esercizio 3 (Punti 8)**.** Si considerino i sottoinsiemi U e V di $\mathbb{R}^3$, rispettivamente formati dai vettori $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ tali che

$$\Sigma_U = \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \Sigma_V = \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

1. Verificare che sia U che V sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$.
2. Determinarne la dimensione e una base di U e V.
3. Determinare la dimensione e una base dell'intersezione $U \cap V$.
4. $\mathbb{R}^3$ è somma diretta di U e V?

Esercizio 4 (Punti 6)**.** ☻

1. $V = U \oplus W$ se e solo se ogni $v \in V$ può essere scritto in uno e un solo modo come $v = u + w$ con $u \in U$ e $w \in W$.
2. Sia $V = U \oplus W$. Se $\mathcal{B}_U$ è una base di U e $\mathcal{B}_W$ è una base di W, allora $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ è una base di V.

N.B.
Il simbolo ☻ denota esercizi giudicati **difficile**.

*e-mail: nicola.sansonetto@gmail.com