Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2009/2010
Algebra Lineare ed Elementi di Geometria
Modulo **Algebra Lineare**

Esempio 21.6

(1) Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$$

Il polinomio minimo è $p_A = (x-6)^2$, quindi A ha un autovalore $\lambda = 6$ di molteplicità algebrica $m = 2$. La molteplicità geometrica è $d = 1$, poiché

$$A - 6\,I_2 = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi A non è diagonalizzabile, ma per il **Teorema di Schur** è *trigonalizzabile*, ovvero simile a una matrice diagonale superiore B.
Per determinare B vediamo innanzitutto che $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ è una base di $E_A(\lambda) = N(A - 6\,I_2)$.
Chiaramente possiamo completare v_1 a una base $\{v_1, v_2 = e_1\}$ di $\mathbb{R}^2$.
Adesso applichiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt 20.4 ponendo
$u_1 = v_1$ con $< u_1, u_1 >= 5$
$u_2 = v_2 - \alpha_{12} u_1$ dove $\alpha_{12} = \dfrac{< u_1, v_2 >}{< u_1, u_1 >} = \frac{2}{5}$, quindi $u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$ e $< u_2, u_2 >= \frac{1}{5}$
e normalizziamo i vettori:
$w_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\, u_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} \end{pmatrix}$, $\quad w_2 = \sqrt{5}\, u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{pmatrix}$.
Otteniamo una base ortonormale $\{w_1, w_2\}$ di $\mathbb{R}^2$, quindi una matrice ortogonale

$$S = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{pmatrix} \in O(2)$$

tale che $S^T A S = B$ è una matrice triangolare superiore con $\lambda = 6$ sulla diagonale (poiché sappiamo per 17.5 che $p_A = p_B$, quindi A e B hanno gli stessi autovalori con le stesse molteplicità algebriche).
Possiamo calcolare esplicitamente

$$B = \begin{pmatrix} 6 & -10 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

(2) Adesso consideriamo una matrice simmetrica con coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$$

Per il Corollario 21.10 del **Teorema Spettrale** sappiamo che gli autovalori di A sono tutti reali e A è diagonalizzabile tramite una matrice ortogonale S. Determiniamo S e la matrice diagonale D.
Abbiamo $p_A = x^2 - 12\,x + 11 = (x-1)(x-11)$, quindi A ha gli autovalori 1 e 11 (e potremmo dedurre che A è diagonalizzabile anche da 18.2). Inoltre
$A - 1\,I_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ è una base di $E_A(1)$ di norma $\sqrt{10}$,
$A - 11\,I_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ è una base di $E_A(11)$ di norma $\frac{\sqrt{10}}{3}$.
Notiamo che $v_1 \perp v_2$, quindi per trovare una base ortonormale $\{w_1, w_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ basta normalizzare i vettori:
$w_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\quad w_2 = \frac{3}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
Otteniamo una matrice ortogonale

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{3}{10}\sqrt{10} & \frac{1}{10}\sqrt{10} \\ \frac{1}{10}\sqrt{10} & \frac{2}{10}\sqrt{10} \end{pmatrix} \in O(2)$$

tale che

$$S^T A S = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$$