Matematica e Statistica

Prova d'Esame (24/09/2010)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2009/10

Matematica e Statistica

Prova d'Esame di $\boxed{\text{MATEMATICA}}$ (24/09/2010)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2009/10

Cognome-Nome ______________________________________ Matr. _______________
IN STAMPATELLO

(1) Dati i vettori $\vec{u} = (1, 2, -1)$ e $\vec{v} = (3, 0, 1)$ e i punti $A(0, 2, 1)$ e $B(-2, 1, 1)$, determinare in forma parametrica e cartesiana il piano Π passante per A e B e parallelo a $\vec{u}$, e il piano Σ passante per A e ortogonale a $\vec{v}$. Determinare poi una forma parametrica per la retta $r = \Pi \cap \Sigma$.

(2) Studiare l'andamento di $f(x) = \dfrac{2|x| - 3}{x^2 - x - 2}$, e tracciarne il grafico.[1]

(3) (a) Calcolare $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(x \cos 2x + \frac{\sin x}{3 + 2\cos x} \right) dx$.

(b) Disegnare $S = \{(x, y) : |x| - 2 \leq y \leq 1 - 2x^3,\ x - 2y + 2 \geq 0\}$, e calcolarne l'area.

(4) Data $g(x, y) = \dfrac{x^2 y - 4}{x + 2y}$, determinarne dominio, zeri, segno e limiti interessanti, disegnando i risultati. Trovarne i punti stazionari ed eventuali punti di massimo o minimo locale.

(5) Trovare tutte le soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale $y'' + 4y' + 4y = 4x$ e tutte quelle dell'equazione differenziale $y' = (2x - 1)(2y - 1)$ tali che $y'(0) = -4$.

[1] Non è richiesto lo studio della convessità.

Matematica e Statistica

Prova d'Esame di STATISTICA (24/09/2010)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2009/10

Cognome-Nome ______________________________ Matr. ______________
IN STAMPATELLO

Per ogni calcolo effettuato scrivere anche la formula teorica da utilizzare. ▶▶▶▶ **Tabella sul retro** ▶▶▶▶

ESERCIZIO 1

La tabella seguente riporta la quantità in mg di ione sodio presente in un campione di 300 bottiglie d'acqua.

mg per litro	f
0	120
5	36
7	42
12	102

Sulla distribuzione di frequenze presentata in tabella, calcolare:

(a) la media aritmetica, la media armonica e la media geometrica;
(b) la mediana e la moda;
(c) la varianza.

ESERCIZIO 2

X	Y
2	30
6	25
9	26
13	19

Sui dati presentati in tabella calcolare:
(a) i parametri della retta interpolante Y'=a+bX ;
(b) il coefficiente di correlazione lineare, commentandolo brevemente.

ESERCIZIO 3

E' stata condotta una ricerca con lo scopo di verificare se esiste una relazione fra un'alimentazione che fa uso di farina di grano transgenico e il rischio di ulcera allo stomaco. Sono stati quindi raccolti i dati su un campione di 100 persone, di cui 90 sane e 10 malate di ulcera allo stomaco:

Modalità	Resistenza	Non resistenza
Trattamento	46	6
Nessun trattamento	44	4

Sulla base dei dati sopra esposti, si può ritenere che esista una connessione fra grano transgenico e rischio di ulcera (ad un livello di significatività del 5%)?

Allegato: Tabella “Chi Quadrato”

Valori della variabile "Chi Quadrato" che sottendono una coda destra di ammontare alpha

G.d.l.	alpha %							
	99,5	**99**	**97,5**	**95**	**5**	**2,5**	**1**	**0,5**
1	0,00	0,00	0,00	0,00	3,84	5,02	6,64	7,88
2	0,01	0,02	0,05	0,10	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,07	0,12	0,22	0,35	7,82	9,35	11,35	12,84
4	0,21	0,30	0,48	0,71	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,41	0,55	0,83	1,15	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,68	0,87	1,24	1,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,99	1,24	1,69	2,17	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	15,51	17,54	20,09	21,96
9	1,74	2,09	2,70	3,33	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,94	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,60	3,05	3,82	4,58	19,68	21,92	24,73	26,76
12	3,07	3,57	4,40	5,23	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,57	4,11	5,01	5,89	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,08	4,66	5,63	6,57	23,69	26,12	29,14	31,32
15	4,60	5,23	6,26	7,26	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,14	5,81	6,91	7,96	26,30	28,85	32,00	34,27
17	5,70	6,41	7,56	8,67	27,59	30,19	33,41	35,72
18	6,27	7,02	8,23	9,39	28,87	31,53	34,81	37,16
19	6,84	7,63	8,91	10,12	30,14	32,85	36,19	38,58
20	7,43	8,26	9,59	10,85	31,41	34,17	37,57	40,00

Allegato: Tabella “*t* di Student”

Valori della ”*t* di Student” che sottendono una coda destra di ammontare alpha

G.d.l.	α				
ν	***5%***	***2,5%***	***1%***	***0,5%***	***0,1%***
1	6,314	12,706	31,821	63,657	318,310
2	2,920	4,303	6,965	9,925	22,327
3	2,353	3,182	4,541	5,841	10,215
4	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173
5	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893
6	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
7	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785
8	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501
9	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297
10	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144
11	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025
12	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930
13	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852
14	1,761	2,145	2,624	2,997	3,787
15	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733
16	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686
17	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646
18	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610
19	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579
20	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552

Soluzioni

MATEMATICA

(1) Il piano Π, parallelo al vettore $\vec{u} = (1, 2, -1)$, poiché passa per i punti $A(0, 2, 1)$ e $B(-2, 1, 1)$ sarà parallelo anche al vettore $\vec{u}' = (0, 2, 1) - (-2, 1, 1) = (2, 1, 0)$, dunque una forma parametrica sarà $\Pi = \{(0, 2, 1) + s(1, 2, -1) + t(2, 1, 0) : s, t \in \mathbb{R}\} = \{(s + 2t, 2 + 2s + t, 1 - s) : s, t \in \mathbb{R}\}$; da $z = 1 - s$ e $y = 2 + 2s + t$ si ricava $s = 1 - z$ e $t = -4 + y + 2z$, che inserite in $x = s + 2t$ danno la forma cartesiana $x - 2y - 3z + 7 = 0$. Il piano Σ, in quanto ortogonale a $\vec{v} = (3, 0, 1)$, avrà forma parametrica $3x + z + k = 0$, e il passaggio per A dà $k = -1$; due vettori ortogonali a $\vec{v}$ (dunque paralleli a Σ) e non paralleli tra loro sono ad esempio $\vec{w}' = (0, 1, 0)$ e $\vec{w}'' = (1, 0, -3)$, da cui possiamo scrivere la forma parametrica $\Sigma = \{(0, 2, 1)+s(0, 1, 0)+t(1, 0, -3) : s, t \in \mathbb{R}\} = \{(t, 2+s, 1-3t) : s, t \in \mathbb{R}\}$. • Occupiamoci ora di trovare una forma parametrica per la retta $r = \Pi \cap \Sigma$: dovendo essa evidentemente passare per A, basterà trovare un vettore ad essa parallelo. Un vettore ortogonale al piano Π sarà $(1, -2, -3)$ (basta guardare l'equazione cartesiana), mentre un vettore ortogonale al piano Σ lo conosciamo già, ed è $\vec{v} = (3, 0, 1)$: un vettore ortogonale ad entrambi questi vettori sarà automaticamente parallelo a entrambi i piani, dunque alla loro intersezione r, e tale vettore è $(1, -2, -3) \wedge (3, 0, 1) = (-2, -10, 6)$. Come vettore parallelo a r possiamo perciò scegliere quest'ultimo o, volendo, lo stesso moltiplicato per $-\frac{1}{2}$, ovvero $(1, 5, -3)$: una forma parametrica cercata è allora $r = \{(0, 2, 1) + t(1, 5, -3) : t \in \mathbb{R}\} = \{(t, 2 + 5t, 1 - 3t) : t \in \mathbb{R}\}$.

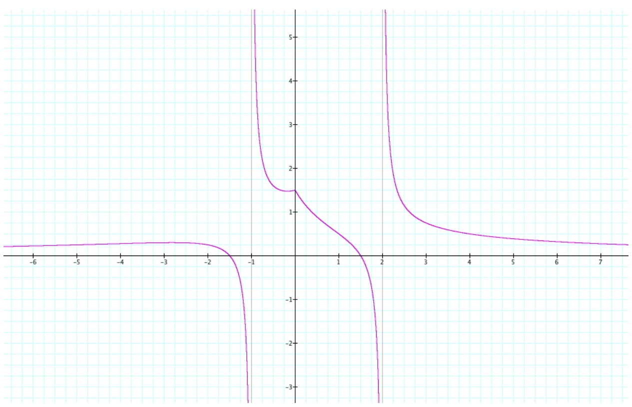
(2) (Figura 1) La funzione $f(x) = \frac{2|x|-3}{x^2-x-2}$ è definita per $x \neq -1$ e $x \neq 2$, ed è derivabile infinite volte nel suo dominio tranne che in $x = 0$ dove è continua ma è previsto un punto angoloso a causa del modulo. Non ha parità ne' periodicità; i limiti notevoli valgono $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = 0^+$, $\lim_{x\to-1^\mp} f(x) = \mp\infty$ e $\lim_{x\to 2^\mp} f(x) = \mp\infty$ (dunque $y = 0$ è asintoto orizzontale bilatero, e le rette $x = -1$ e $x = 2$ sono asintoti verticali bilateri). Vale $f(x) = 0$ per $x = \mp\frac{3}{2}$; il numeratore è > 0 per $x < -\frac{3}{2}$ o $x > \frac{3}{2}$, il denominatore è > 0 per $x < -1$ o $x > 2$, perciò vale $f(x) > 0$ per $x < -\frac{3}{2}$ o $-1 < x < \frac{3}{2}$ o $x > 2$. Posto $\sigma = \operatorname{sign} x$ (dunque $\sigma = \mp 1$ a seconda che $x \lesseqgtr 0$) e ricordando che $|x|' = \sigma$ si ha $f'(x) = \frac{-2\sigma x^2+6x-4\sigma-3}{(x-x-2)^2}$: quando $x > 0$ il numeratore diventa $-(2x^2 - 6x + 7)$, che è un trinomio sempre negativo e dunque vale sempre $f'(x) < 0$; mentre quando $x < 0$ il numeratore $2x^2 + 6x + 1$ è positivo per $x < x_1 := -\frac{3+\sqrt{7}}{2} \sim -2{,}8$ e $x > x_2 := -\frac{3-\sqrt{7}}{2} \sim -0{,}2$. Pertanto, quando x cresce provenendo da $-\infty$, la funzione $f(x)$ cresce da 0^+ fino a un massimo locale in $x = x_1$ (con $f(x_1) = \frac{2(4-\sqrt{7})}{9} \sim 0{,}30$), poi decresce fino a $-\infty$ quando x tende a -1^-; quindi decresce da $+\infty$ (quando x proviene da -1^+) a un minimo locale in $x = x_2$ (con $f(x_2) = \frac{2(4+\sqrt{7})}{9} \sim 1{,}47$), da cui cresce fino al valore $f(0) = \frac{3}{2} = 1{,}5$; infine decresce sia prima che dopo 2. Notiamo infine che i valori $f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \frac{1}{4}$ e $f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\frac{7}{4}$ sono diversi tra loro, dunque come previsto $x = 0$ è un punto angoloso.

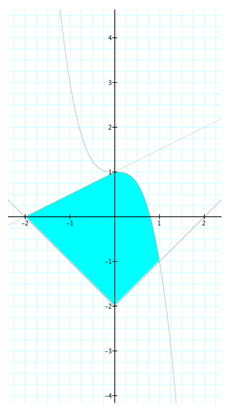
(3) (a) Per linearità si ha $\int_0^\pi (x \cos 2x + \frac{\sin x}{3+2\cos x})\, dx = \int_0^\pi x \cos 2x\, dx + \int_0^\pi \frac{\sin x}{3+2\cos x}\, dx$. Operando per parti, il primo integrale vale $(x\frac{1}{2}\sin 2x]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{2}\sin 2x\, dx = (0) - (0) + (\frac{1}{4}\cos 2x]_0^\pi = (0) - (0) = 0$; quanto al secondo, col cambio di variabile $t = \cos x$ esso diventa $\int_1^{-1}(-\frac{1}{3+2t})\, dt = \int_{-1}^1 \frac{1}{2t+3}\, dt = (\frac{1}{2}\log|2t + 3|]_{-1}^1 = \frac{1}{2}\log 5$. Pertanto l'integrale proposto vale $\frac{1}{2}\log 5 \sim 0{,}8$.

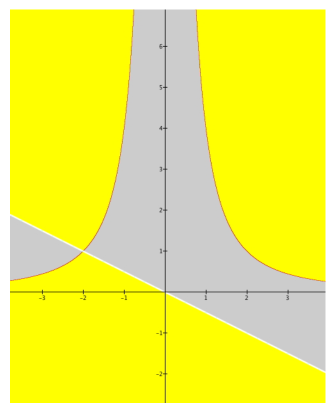
(b) (Figura 2) L'insieme $S = \{(x, y) : |x| - 2 \leq y \leq 1 - 2x^3\,,\ x - 2y + 2 \geq 0\}$ è rappresentato in figura; l'area risulta pertanto $\int_{-2}^0(\frac{x}{2} + 1)\, dx + \int_0^1(1 - 2x^3)\, dx + \int_1^0(x - 2)\, dx + \int_0^{-2}(-x - 2)\, dx = (\frac{x^2}{4} + x]_{-2}^0 + (x - \frac{x^4}{2}]_0^1 + (\frac{x^2}{2} - 2x]_1^0 + (-\frac{x^2}{2} - 2x]_0^{-2} = (0) - (-1) + (\frac{1}{2}) - (0) + (0) - (-\frac{3}{2}) + (2) - (0) = 5$.

(4) (Figura 3) Il dominio di $g(x, y) = \frac{x^2y-4}{x+2y}$ è dato da $x + 2y \neq 0$ (si tratta di togliere i punti della retta $y = -\frac{1}{2}x$). La funzione si annulla quando $x^2y - 4 = 0$, ovvero $y = \frac{4}{x^2}$, i punti di un grafico di facile disegno (tranne il punto $A(-2, 1)$, unico punto di intersezione tra il grafico e la retta $y = -\frac{1}{2}x$, che sta fuori dal dominio). Il numeratore è > 0 quando $y > \frac{4}{x^2}$, ovvero nei punti che stanno sopra tale grafico, mentre il denominatore è > 0 quando $y > -\frac{1}{2}x$, ovvero nei punti sopra la retta: il segno di g ne segue per quoziente. I limiti interessanti sono nei punti della retta $y = -\frac{1}{2}x$ e in ∞_2. In un qualsiasi punto della retta diverso da A il limite vale $\mp\infty$ (col segno che dipende dal lato della retta da cui si tende al punto in questione); mentre non esiste ne' in A ne' in ∞_2, come si nota osservando che sui punti del grafico $y = \frac{4}{x^2}$ la funzione è nulla, mentre avvicinandosi alla retta $y = -\frac{1}{2}x$ essa tende a $\mp\infty$. Le derivate parziali sono $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{2xy(x+2y)-1(x^2y-4)}{(x+2y)^2} = \frac{x^2y+4xy^2+4}{(x+2y)^2}$ e $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{x^2(x+2y)-2(x^2y-4)}{(x+2y)^2} = \frac{x^3+8}{(x+2y)^2}$; considerato il sistema $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = 0$, da $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ si ottiene $x = -2$, che messo in $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$ dà $y = 1$ o $y = -\frac{1}{2}$, ovvero i punti A (non accettabile perché fuori dal dominio) e $B(-2, -\frac{1}{2})$. L'unico punto stazionario per g è dunque B, ed è anche l'unico punto candidato a essere eventualmente di massimo o minimo locale: per vederlo, usiamo il criterio dell'hessiano. Dopo qualche conto, le derivate parziali seconde di g risultano $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{8(y^3-1)}{(x+2y)^3}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{x^3+6x^2y-16}{(x+2y)^3}$ e $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -\frac{4(x^3+8)}{(x+2y)^3}$; se calcolate in B, l'hessiano risulta $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(B) & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(B) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(B) & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix}$, e il relativo criterio assicura che il punto B è una sella (ovvero ne' di massimo ne' di minimo locale) per g.

(5) L'equazione differenziale $y'' + 4y' + 4y = 4x$ è lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $t^2 + 4t + 4 = 0$ ha una soluzione doppia -2, dunque le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono del tipo $Ae^{-2x} + Bxe^{-2x}$ con $A, B \in \mathbb{R}$. Una soluzione particolare per $b(x) = 4x$ sarà del tipo $\tilde{y}(x) = ax + b$, e imponendo che $\tilde{y}'' + 4\tilde{y}' + 4\tilde{y} = 4x$ si ottiene $0 + 4a + 4(ax + b) = 4x$, ovvero $4ax + 4(a + b) = 4a$, ovvero $4a = 4$ e $4(a + b) = 0$, ovvero $(a, b) = (1, -1)$. Pertanto tutte le soluzioni della prima equazione differenziale sono $y(x) = Ae^{-2x} + Bxe^{-2x} + x - 1$, con $A, B \in \mathbb{R}$. Imponiamo ora che $y'(0) = -4$: poiché la derivata è $y'(x) = -2Ae^{-2x} + B(1 - 2x)e^{-2x} + 1$, la condizione risulta $y'(0) = -2A + B + 1 = -4$, ovvero $B = 2A - 5$, e dunque le soluzioni cercate sono quelle del tipo $y(x) = Ae^{-2x} + (2A - 5)xe^{-2x} + x - 1$, con $A \in \mathbb{R}$. • L'equazione differenziale $y' = (2x - 1)(2y - 1)$ è del primo ordine, e può essere vista sia nella forma a variabili separabili sia nella forma lineare: proviamo a risolverla in entrambi i modi, verificando che si trova la stessa famiglia di soluzioni. (1) Interpretandola come variabili separabili, da $\frac{1}{2y-1}\, dy = (2x - 1)\, dx$ si ottiene $\frac{1}{2} \log|2y - 1| = x^2 - x + k$ con $k \in \mathbb{R}$, da cui $\log|2y-1| = 2x^2-2x+2k$, da cui $|2y-1| = e^{2x^2-2x+2k} = e^{2k}e^{2x^2-2x}$, da cui $2y-1 = \mp e^{2k}e^{2x^2-2x}$, da cui finalmente la soluzione generale $y = \frac{1}{2} + h\, e^{2x^2-2x}$ ove si è posto $h = \mp\frac{1}{2}e^{2k}$ (anche h è dunque una costante arbitraria in $\mathbb{R}$). (2) Interpretiamola ora invece come lineare, cioè nella forma $y' + p(x)\, y = q(x)$ con $p(x) = -2(2x-1)$ e $q(x) = -(2x-1)$. Poiché $P(x) = \int p(x)\, dx = -2x^2+2x$ e $\int e^{P(x)} q(x)\, dx = \int(-2x+1)e^{-2x^2+2x}\, dx = \frac{1}{2}e^{-2x^2+2x}$, la soluzione generale si può scrivere come $y(x) = e^{2x^2-2x}(\frac{1}{2}e^{-2x^2+2x} + k) = \frac{1}{2} + k\, e^{2x^2-2x}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$, che sono le stesse soluzioni trovate poco fa. Imponiamo anche in questo caso che $y'(0) = -4$: poiché la derivata è $y'(x) = k(4x - 2)e^{2x^2-2x}$, la condizione risulta $y'(0) = -2k = -4$, ovvero $k = 2$, dunque l'unica soluzione che soddisfa quanto richiesto è $y(x) = \frac{1}{2} + 2\, e^{2x^2-2x}$.







1. Il grafico della funzione dell'ex. 2. **2.** L'insieme dell'ex. (3.b). **3.** Ex. 4: zeri (rosso), segno positivo (giallo) e negativo (grigio) della funzione g.

ESERCIZIO 1

Sulla distribuzione di frequenze presentata in tabella, calcolare:
a) la media aritmetica, la media armonica e la media geometrica;
b) la mediana e la moda;
c) la varianza.

x	f	x*f	x^2	x^2f
0	120	0	0	0
5	36	180	25	900
7	42	294	49	2058
12	102	1224	144	14688
	300	**1698**		**17646**

a) Calcolo della media aritmetica, armonica e geometrica:

M(X) = $\dfrac{\Sigma\, x * f}{\Sigma\, f} = \dfrac{1698}{300} =$ **5,66**

Ma(X) = **non è calcolabile**, perché una delle x è uguale a zero

Mg(X) = **è nulla**, perché una delle x è uguale a zero

b) Calcolo della mediana e della moda:

x150° =< mediana =< x151° : **me** = **5**

moda = **0**

c) Calcolo della varianza:

V(X) = $M(x^2) - m^2 = \dfrac{17646}{300}$ - 5,66^2 = **26,7844**

ESERCIZIO 2

X	Y	X * Y	X^2	Y^2
2	30	60	4	900
6	25	150	36	625
9	26	234	81	676
13	19	247	169	361
30	**100**	**691**	**290**	**2562**

Sui dati presentati in tabella calcolare:
a) i parametri della retta interpolante Y'=a+bX ;
b) il coefficiente di correlazione lineare, commentandolo brevemente.

a) Calcolo dei parametri della retta interpolante Y'=a+bX :

Calcolo attraverso le formule dirette (ma si poteva anche sviluppare il sistema):

$$b = \frac{Cov(X;Y)}{V(X)} \qquad a = M(Y) - bM(X)$$

$$M(X) = \frac{30}{4} = \mathbf{7{,}5}$$

$$M(Y) = \frac{100}{4} = \mathbf{25}$$

$$Cov(X;Y) = M(X*Y) - M(X)*M(Y) = \frac{691}{4} - 7{,}5 * 25 = \mathbf{-14{,}75}$$

$$V(X) = M(X^2) - M(X)^2 = \frac{290}{4} - 7{,}5\hat{}2 = \mathbf{16{,}25}$$

$$\mathbf{b =} \frac{Cov(X;Y)}{V(X)} = \frac{-14{,}75}{16{,}25} = \mathbf{-0{,}9077}$$

$$\mathbf{a =} \quad M(Y) - bM(X) = 25 - (-0{,}9077)*7{,}5 = \mathbf{31{,}8077}$$

b) Calcolo del coefficiente di correlazione lineare e suo breve commento:

$$r = \frac{Cov(X;Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)}$$

$$V(Y) = \frac{2562}{4} - 25\hat{}2 = \mathbf{15{,}5}$$

$$\sigma(Y) = RADQ(15{,}5) = \mathbf{3{,}9370}$$

$$\sigma(X) = RADQ(16{,}25) = \mathbf{4{,}0311}$$

$$\mathbf{r =} \frac{-14{,}75}{3{,}937 * 4{,}0311} = \mathbf{-0{,}9294}$$

Si registra una forte relazione lineare indiretta

ESERCIZIO 3

E' stata condotta una ricerca con lo scopo di verificare se esiste una relazione fra un'alimentazione che fa uso di farina di grano transgenico e il rischio di ulcera allo stomaco. Sono stati quindi raccolti i dati su un campione di 100 persone, di cui 90 sane e 10 malate di ulcera allo stomaco:

Modalità	**Sano**	**Ulcera**
Transgen.	46	6
Naturale	44	4

Sulla base dei dati sopra esposti, si può ritenere che esista una connessione fra grano transgenico e rischio di ulcera (ad un livello di significatività del 5%)?

Effettuo il test di indipendenza sui risultati della tabella a doppia entrata:

Frequenze osservate f:

f	**Sano**	**Ulcera**	
Transgen.	44	6	**50**
Naturale	46	4	**50**
	90	**10**	**100**

Calcolo delle frequenze teoriche f* sulla base delle frequenze marginali (somme di riga * colonna divise per il totale):

f*	**Sano**	**Ulcera**	
Transgen.	45	5	**50**
Naturale	45	5	**50**
	90	**10**	**100**

f	**f***	**$(f-f^*)^2/f^*$**
44	45	0,0222
6	5	0,2
46	45	0,0222
4	5	0,2
		0,4444

Chi quadrato calcolato = 0,4444

Calcolo del Chi quadrato teorico con $\nu = (r-1)*(c-1) = (2-1)*(2-1) = 1$ g.d.l.

Chi quadrato teorico = 3,84

Poiché il Chi quadrato calcolato è minore del Chi quadrato teorico si accetta l'ipotesi di indipendenza e quindi di mancanza di connessione fra farina di grano transgenico e il rischio di ulcera allo stomaco.