Esercizi (SERIE)

Studiare la convergenza delle seguenti serie:

1) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$ $\overset{\text{RADICE}}{\leadsto}$ $\sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e}$

2) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^3}{3^n}}$ $\overset{\text{RAPP}}{\leadsto}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)^3}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{(n+1)^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^3 \longrightarrow \frac{1}{3}$

3) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{n^n}}$ Usiamo il confronto asintotico: $\frac{2^n+3^n}{n^n}\sim\frac{3^n}{n^n}$

infatti $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{\cancel{n^n}}\cdot\frac{\cancel{n^n}}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{3}{3}\right)^n = 0+1 = 1$

Quindi se conosco il carattere di $\left(\frac{3}{n}\right)^n$ sono a posto...

$\overset{\text{RADICE}}{\leadsto}$ $\sqrt[n]{\left(\frac{3}{n}\right)^n} = \frac{3}{n} \longrightarrow 0$ $\Rightarrow$ la serie converge!!

4) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2-n-1}}$ $\overset{\text{RAPP}}{\leadsto}$ $\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)^2-(n+1)-1}{2n^2-n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n}{2n^2-n-1} = 1$

quindi il criterio del rapporto non ci da informazioni...

$\overset{\text{RADICE}}{\leadsto}$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2n^2-n-1}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\underbrace{\frac{2n^2}{2n^2-n-1}}_{\to 1}\cdot\frac{1}{2n^2}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2n^2}} = 1$

(infatti $n^{\frac{1}{n}} = e^{\log n^{1/n}} = e^{\frac{1}{n}\log n} = e^0 = 1$ perché $\frac{\log n}{n}\to 0$)

Quindi nemmeno con questo abbiamo info... ma:

$a_n = \frac{1}{2n^2-n-1} \sim \frac{1}{2n^2}$ perciò converge...

Infatti $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty$ (lo sapevamo già)

5) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}+\log n}}$ Serie a segni alterni $(a_n > 0)$

Vogliamo usare il Criterio di Leibniz, perciò:

(•) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\log n} = 0$ ✓

(•) La serie è decrescente? (cioè $a_{n+1} \le a_n$)

vale $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ e $\log(n+1) > \log(n)$, perciò:

$$\sqrt{n+1} + \log(n+1) > \sqrt{n} + \log(n) \rightsquigarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}+\log(n+1)} < \frac{1}{\sqrt{n}+\log(n)}$$

Allora per il criterio di Leibniz la serie converge...

Ora, converge anche assolutamente?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}+\log n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\log n} \qquad (\text{infatti } a_n > 0)$$

Ma ora $\frac{1}{\sqrt{n}+\log n} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}} \Rightarrow$ diverge!!!

(infatti la serie di $\frac{1}{n^\alpha}$ converge solo per $\alpha > 1$)

6) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\tan\left(\frac{\log n + \sin n}{n}\right)\right]^2}$ (ricorda che $\lim_{n\to\infty} \frac{\tan x}{x} = 1$)

$$a_n \sim \left[\frac{\log n + \sin n}{n}\right]^2 \le \left[\frac{\log n + 1}{n}\right]^2 \sim \left(\frac{\log n}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2 \log^{-2} n}$$

e questa è quella che vien detta "Serie di Abel":

<u>SERIE di ABEL</u>: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p \log^q(n)} < +\infty$ se $p > 1, \forall q$

se $p = 1, q > 1$

7) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)}$ $\quad a_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} \sim \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} =: b_n$

$\overset{\text{RAPP}}{\rightsquigarrow} \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \longrightarrow 1$ $\quad\boxed{\text{(no info utili)}}$

Osserviamo peró che si tratta di una <u>Serie Telescopica</u>:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = \left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}-\cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}}-(\dots)\right)+(\dots) = 1$$

8) $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\log 2)^n}{2n+1}}$ $\quad$ Intanto notiamo che $a_n > 0$ $\quad (\log 2 > 0)$

$\overset{\text{RAPP}}{\rightsquigarrow} \quad \frac{(\log 2)^{n+1}}{2(n+1)+1}\cdot\frac{2n+1}{(\log 2)^n} = (\log 2)^1\cdot\frac{2n+1}{2n+3} \longrightarrow \log 2 < 1$

9) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+\cos n}}$ $\quad$ Usiamo il criterio di Leibniz $(a_n > 0)$

(•) $a_n = \frac{1}{2n+\cos n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ $\quad$ (poiché $\cos n \in [-1,1]$)

(•) Controlliamo se "a_n" é decrescente ... usiamo un piccolo trucco, ovvero guardiamo $a(x)$

$$a(x) = \frac{1}{2x+\cos x} \quad \rightsquigarrow \quad a'(x) = \frac{-(2-\sin x)}{[2x+\cos x]^2} < 0$$

quindi $a(x)$ é decrescente, e dunque anche $a(n) = a_n$

$\Rightarrow$ Per il criterio di Leibniz, converge !!

Serie di Potenze

Studiare la convergenza delle seguenti serie di potenze:

1) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\log(1+n)}}$ Abbiamo: $a_n = \frac{1}{\log(1+n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Per calcolare il raggio di convergenza, usiamo:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\log(1+n)}{\log(2+n)}\right| = 1 \quad \Rightarrow \quad R = 1$$

Dunque la serie converge $\forall x \in (-1,1)$, diverge per $|x| > 1$

Andiamo a vedere cosa accade per $x = \pm 1$:

$\underline{x = 1}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(1+n)}$ e chiamando $b_n = \frac{1}{\log(1+n)}$ si ha:

$b_n \geq \frac{1}{n}$ (infatti: $\log(n+1) \leq n$) ma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge

Quindi per il criterio del confronto, per $x = 1$ diverge!!

$\underline{x = -1}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(1+n)}$ (Notare che diverge assolutamente)

Per verificare la convergenza semplice, uso Leibniz:

$b_n = \frac{1}{\log(1+n)} \to 0$ e vale $b_{n+1} \leq b_n$ (oK)

Quindi la serie converge $\forall x \in [-1,1)$

2) $\boxed{\sum_{n=3}^{\infty} \binom{n}{n-2} x^n}$ $a_n = \binom{n}{n-2}$ Calcolo il raggio:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \binom{n+1}{n-1} : \binom{n}{n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n-1)!\cancel{2!}} \cdot \frac{(n-2)!\cancel{2!}}{n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cancel{n!}}{(n-1)\cancel{(n-2)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-2)!}}{\cancel{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n-1} = 1$$

Controlliamo quindi agli estremi di $(-1, 1)$:

$\underline{x = 1}$ $\sum_{n=3}^{\infty} \binom{n}{n-2}$ dove $a_n = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}\,2!} = \frac{n^2-n}{2}$

$\Rightarrow a_n \sim \frac{n^2}{2} \longrightarrow \infty \Rightarrow$ per $x = 1$ non converge!

$\underline{x = -1}$ $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \binom{n}{n-2}$ Non converge assolutamente (vedi sopra!)

Poiché il termine n-esimo diverge, la condizione necessaria per la convergenza non è soddisfatta ($\Rightarrow$ la serie diverge!)

3) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{1}{3^n}\right) x^n}$ Calcolo R con il metodo della radice:

Calcolo $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{2^n \sin\left(\frac{1}{3^n}\right)} = 2 \sqrt[n]{\sin\left(\frac{1}{3^n}\right)} = 2 \cdot \sqrt[n]{\frac{\sin\left(\frac{1}{3^n}\right)}{\left(\frac{1}{3^n}\right)} \cdot \left(\frac{1}{3^n}\right)} =$

$= 2 \cdot \frac{1}{3} \sqrt[n]{\frac{\sin\left(\frac{1}{3^n}\right)}{\left(\frac{1}{3^n}\right)}} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{2}{3} \cdot (1)^0 = \frac{2}{3}$ $\left[R = \frac{1}{2/3} = \frac{3}{2}\right]$

Quindi $R = \frac{2}{3}$ e la serie converge $\forall x \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Vediamo meglio agli estremi...

$\underline{x = \frac{3}{2}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \sin\left(\frac{1}{3^n}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{3^n}\right)}{\left(\frac{1}{3^n}\right)}$

Ma poiché $a_n \to 1$, non può convergere (COND. NECESSARIA)

$\underline{x = -\frac{3}{2}}$ Anche qui $a_n \to 1$, quindi non posso usare Leibniz...

4) $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$ $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0$

Quindi il raggio di convergenza è $R = 1/0 = +\infty$,
dunque la serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$.

5) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a^{\sqrt{n}}(x-1)^n}$ $\quad 0 < a < 1$ (Notare che scritta così non sembra una serie di potenze)

Poniamo $z = x-1$ e otteniamo perciò $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\sqrt{n}} z^n$

Ora possiamo andare a studiare questa:

$a^{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ perché $a \in (0,1)$, inoltre:

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} a^{\frac{\sqrt{n}}{n}} = \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1 \qquad [R = 1]$

Quindi la serie converge puntualmente $\forall z \in (-1,1)$

$\underline{z=1|}$ $\sum_{n=0}^{\infty} a^{\sqrt{n}} \rightsquigarrow a^{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^2}$ infatti $a^{\sqrt{n}} \cdot n^2 \leq 1$ (n grande)

(infatti basta notare che $a^{\sqrt{n}} n^2 \to 0$ per $n \to \infty$)

Quindi, poiché la serie di $1/n^2$ converge, anche la nostra converge.

$\underline{z=-1|}$ $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^{\sqrt{n}}$ Converge Assolutamente (vedi sopra)

Perciò la serie converge $\forall z \in [-1,1] \Rightarrow \forall x \in [0,2]$

6) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} [\log(\log 3n)]\, x^n}$ $\qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\log(\log 3n)} = 1$

(per verificare il limite si usa $x = e^{\log x}$ e l'Hopital ...)

Ma allora converge puntualmente $\forall x \in (-1,1)$ ... inoltre:

$\underline{x=1|}$ $\sum_{n=1}^{\infty} [\log(\log(3n))] \rightsquigarrow a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

quindi la serie diverge (non vale la condiz. necessaria per la convergenza ... il termine a_n non va a zero!)

$\underline{x=-1|}$ Non è comunque soddisfatta la condizione!!!