ALGEBRA LINEARE CON ELEMENTI DI GEOMETRIA

modulo : ELEMENTI DI GEOMETRIA (Prof. M. Spera)

Prova scritta del 7 febbraio 2011

(1) Nel piano euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, ampliato proiettivamente, si determini la conica $\mathcal{C}$ tangente a $r: y = 3x$ in $A: [0,1,3]$, tangente a $s: y = -x+1$ in $B: [1,2,-1]$ e con centro $C: [1,1,3]$. Se ne individui il tipo affine, gli eventuali asintoti e gli assi, abbozzandone altresì il grafico.

(2) Nello spazio euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, determinare il fascio di piani $\mathcal{F}$ di asse $r: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t+1 \end{cases}$. Considerato il piano $\pi \in \mathcal{F}$ passante per $A: (1,1,0)$, nonché i punti $B: (1,0,-2)$, $C\ (0,0,1)$ (che appartengono a π), si proiettino da $O: (0,0,0)$ detti punti sul piano $\pi': x - z + 1 = 0$ (che $\in \mathcal{F}$), e siano A', B', C' le loro proiezioni. Determinare il volume del solido $OABCA'B'C'$ (di fatto è $C = C'$) [abbozzare una figura!]. Dimostrare che le rette AB e $A'B'$ (e le analoghe BC, $B'C'$, e AC, $A'C'$) sono complanari e che i relativi pti di intersezione sono allineati. Su quale retta si trovano? [Non c'è bisogno di fare conti]

Tempo a disposizione 1h 15m

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

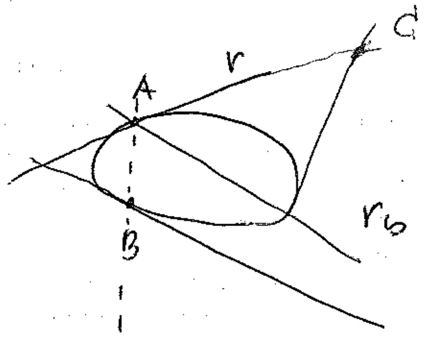
Silegeo 7/2/12

(1) conica tangente a $\overset{r}{y=3x}$ in $A:[0,1,3]$

tangente a $s: y = -x+1$ in $B:[1,2,-1]$

e con centro in $C:[1,1,3]$

$y=3x$ è un asintoto della conica (e il centro vi appartiene, come dev'essere)



la retta AB ha equazione $\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$

ossia $x_0 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}_{\underbrace{-1-6}_{-7}} - x_1 \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}_{-3} + x_2 \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}_{-1} = 0$

$\boxed{-7x_0 + 3x_1 - x_2 = 0}$

$\underset{6+1-7=0}{3x - y - 7 = 0}$ (è la parallela ad r per B)

si giunge al fascio di coniche bitangenti

$$(3x-y)(x+y-1) + \lambda(3x-y-7)^2 = 0$$

$$(3x_1-x_2)(x_1+x_2-x_0) + \lambda(3x_1-x_2-7x_0)^2 = 0$$

$$3x^2 \overbrace{-xy + 3xy}^{2xy} - y^2 - 3x + y$$
$$+ \lambda \left(9x^2 + y^2 + 49 - 6xy - 42x + 14y \right) = 0$$

$$(9\lambda + 3)x^2 + (2 - 6\lambda)xy + (\lambda - 1)y^2$$
$$+ (-3 - 42\lambda)x + (1 + 14\lambda)y + 49\lambda = 0$$

polare di C_1

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 49\lambda & -\frac{3}{2} - 21\lambda & \frac{1}{2} + 7\lambda \\ -\frac{3}{2} - 21\lambda & 9\lambda + 3 & 1 - 3\lambda \\ \frac{1}{2} + 7\lambda & 1 - 3\lambda & \lambda - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$49\lambda$$

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 49\lambda \cancel{- \frac{3}{2}} \cancel{- 21\lambda} \cancel{+ \frac{3}{2}} \cancel{+ 21\lambda} \\ -\frac{3}{2} - 21\lambda + \cancel{9\lambda} + 3 + 3 \cancel{- 9\lambda} \\ \frac{1}{2} + 7\lambda + 1 \cancel{- 3\lambda} \cancel{+ 3\lambda} - 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$-\frac{3}{2} + 6 - 21\lambda = 0$$
$$-3 + 12 - 42\lambda = 0$$
$$42\lambda = 9$$
$$\lambda = \frac{9}{42} = \frac{3}{14}$$

$$\frac{1}{2} + 7\lambda - 2 = 0$$
$$1 + 14\lambda - 4 = 0$$
$$14\lambda = 3 \qquad \lambda = \frac{3}{14}$$

Si trova subito

$$\boxed{\lambda = \frac{3}{14}}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{21}{2} & -6 & 2 \\ -6 & \frac{69}{14} & \frac{5}{14} \\ 2 & \frac{5}{14} & -\frac{11}{14} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 147 & -84 & 28 \\ -84 & 69 & 5 \\ 28 & 5 & -11 \end{pmatrix}$$

altro asintoto : con. A_{00}

$$A_{00} = \begin{pmatrix} 69 & 5 \\ 5 & -11 \end{pmatrix} \qquad a_{00} = -69\cdot 11 - 25 = -784 < 0$$

(iperbole)

imponiamo $\begin{pmatrix} 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 69 & 5 \\ 5 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = 0$

(asintoti = diametri autoconiugati)

$$69 + 10m - 11m^2 = 0$$
$$11m^2 - 10m - 69 = 0$$

$$m = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 69\cdot 11}}{11} =$$

$$= \frac{5 \pm 28}{11} \begin{cases} \frac{33}{11} = 3 & \leftarrow \text{OK !!} \\ -\frac{23}{11} \end{cases}$$

$$69 \cdot \frac{3}{14} = \frac{7\cdot 3}{2}$$

$$-\frac{3}{2} - 21 \cdot \frac{3}{14} = -\frac{3}{2} - \frac{3\cdot 3}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{9}{2} = -\frac{12}{2} = -6$$

$$\frac{1}{2} + \cancel{7}\cdot\frac{3}{\cancel{14}} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$

$$9\cdot\frac{3}{14} + 3 = \frac{27+42}{14} = \frac{69}{14}$$

$$1 - 3\,\frac{3}{14} = 1 - \frac{9}{14} = \frac{5}{14}$$

$$\frac{3}{14} - 1 = \frac{3-14}{14} = -\frac{11}{14}$$

$21 \cdot 7 = 147$

$14 \cdot 6 = 84$

$69 \cdot 11 = 759$, $759 + 25 = 784 = 28^2$

$28 \cdot 28 = 784$

Assi : diametri coniugati ortogonali

$$\begin{pmatrix} -m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 69 & 5 \\ 5 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 69 + 5m \\ 5 - 11m \end{pmatrix} = 0$$

$$-m(69 + 5m) + 5 - 11m = 0$$

$$-69m - 5m^2 + 5 - 11m = 0$$

$$5m^2 + 80m - 5 = 0$$

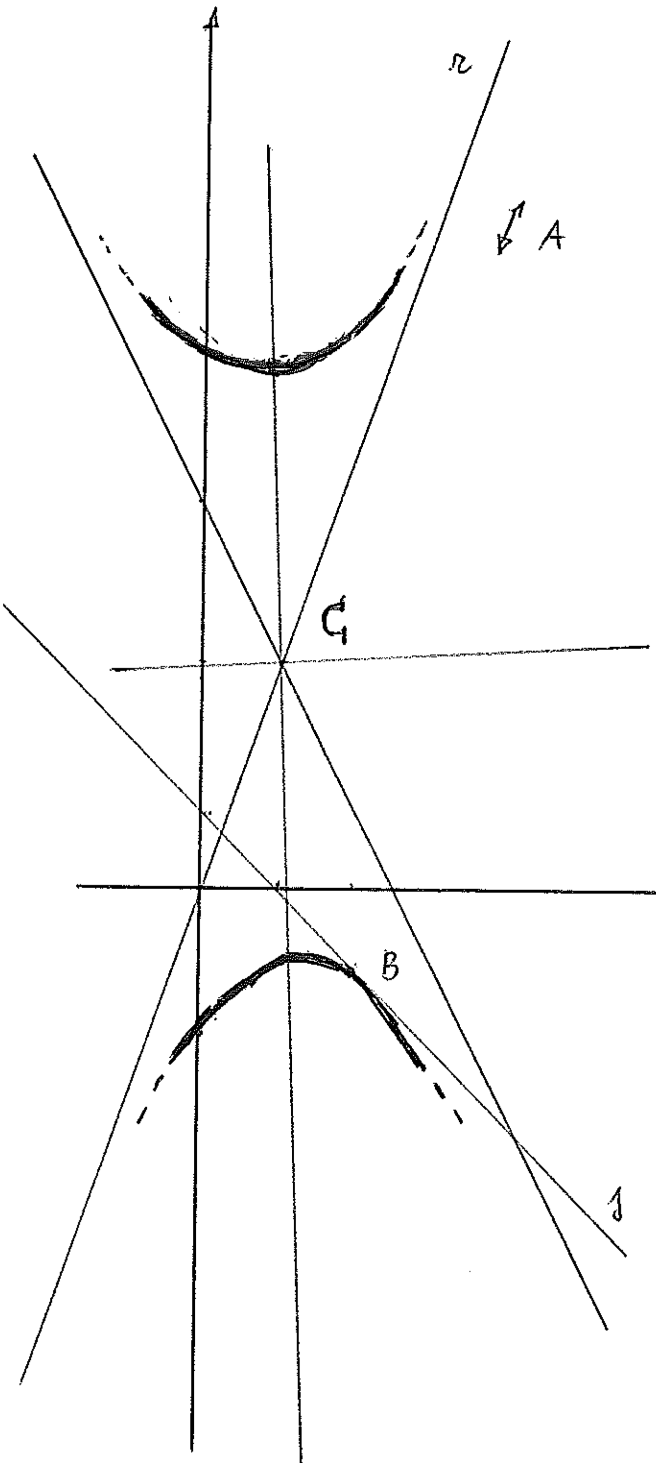
$$m^2 + 16m - 1 = 0$$

$$m = -8 \pm \sqrt{64+1} = -8 \pm \sqrt{65}$$

$$\left[(-8 + \sqrt{65})(-8 - \sqrt{65}) = 64 - 65 = -1 \quad \checkmark \right]$$

equazione assi : $\quad y - 3 = (-8 \pm \sqrt{65})(x - 1)$

Abbozzo del grafico



asse trasverso

int. con l'asse y

$x=0$

$$147+56y-11y^2=0$$

$$11y^2-56y-147=0$$

$$y=\frac{28\pm\sqrt{784+147\cdot 11}}{11}$$

$$=\frac{28\pm 49}{11}\begin{cases}7\\ -\frac{21}{11}\end{cases}$$

$$\begin{array}{r}147\\ \times 11\\ \hline 147\\ 147\\ \hline 1617\\ 784\\ \hline 2401\end{array}$$

$$\begin{array}{r}49\\ 28\\ \hline 77\end{array}$$

$$\begin{array}{r}49\\ 28\\ \hline 21\end{array}$$

$$\begin{array}{r}49\\ 49\\ \hline 441\\ 196\\ \hline 2401\end{array}$$

(2) $r: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t+1 \end{cases}$

Elegeo
7 febbraio 2011

$\mathcal{F}$: fascio di piani di asse r generato da

$$\boxed{\pi_1 : \quad 2x - y = 0}$$

$$\pi_2 \qquad z - x - 1 = 0$$

$$\boxed{\pi_2 : \quad x - z + 1 = 0}$$

piano π del fascio $\mathcal{F}$ passante per $A:(1,1,0)$

$$\lambda \pi_1 + \mu \pi_2 = 0 \qquad (\lambda,\mu) \neq (0,0)$$

$$\lambda(2x-y) + \mu(x-z+1) = 0$$

passaggio per $A:(1,1,0)$: $\lambda(\underbrace{2-1}_{1}) + \mu(\underbrace{1-0+1}_{2}) = 0$

$$\lambda + 2\mu = 0$$

poniamo: $\mu = 1 \Rightarrow \lambda = -2$

$$-2(2x-y) + x - z + 1 = 0$$

$$-4x + 2y + x - z + 1 = 0$$

$$-3x + 2y - z + 1 = 0$$

$$\boxed{\pi: \quad 3x - 2y + z - 1 = 0}$$ $3 - 2 + 0 - 1 = 1 - 1 = 0$ ✓
passa per A

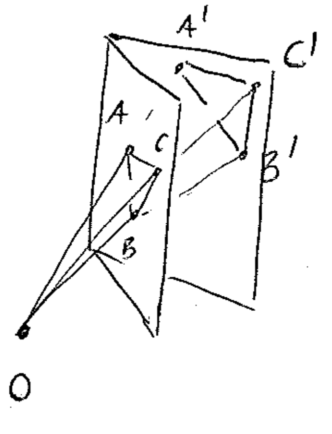
i pti $B:(1,0,-2)$, $C:(0,0,1)$ appartengono a π

$3 - 2 - 1 = 0$ ✓ $\qquad 1 - 1 = 0$ ✓

Consideriamo le proiezioni A', B', C' su $\pi_2: x - z + 1 = 0$

di A, B, C da $O: (0,0,0)$ $\quad (O \notin \pi \quad O \notin \pi_2)$

(non fedele)



A': $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ (retta OA)

interseco con $\pi_2: x - z + 1 = 0$

$t - 0 + 1 = 0$

$t + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{t = -1}$

$\boxed{A': (-1, -1, 0)}$

B': $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -2t \end{cases}$ (retta OB)

interseco con π_2

$t + 2t + 1 = 0$

$3t + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{t = -\frac{1}{3}}$

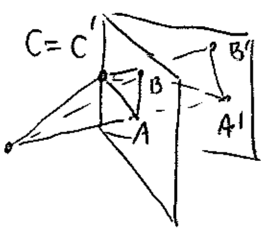
$\boxed{B': \left(-\frac{1}{3}, 0, +\frac{2}{3}\right)}$

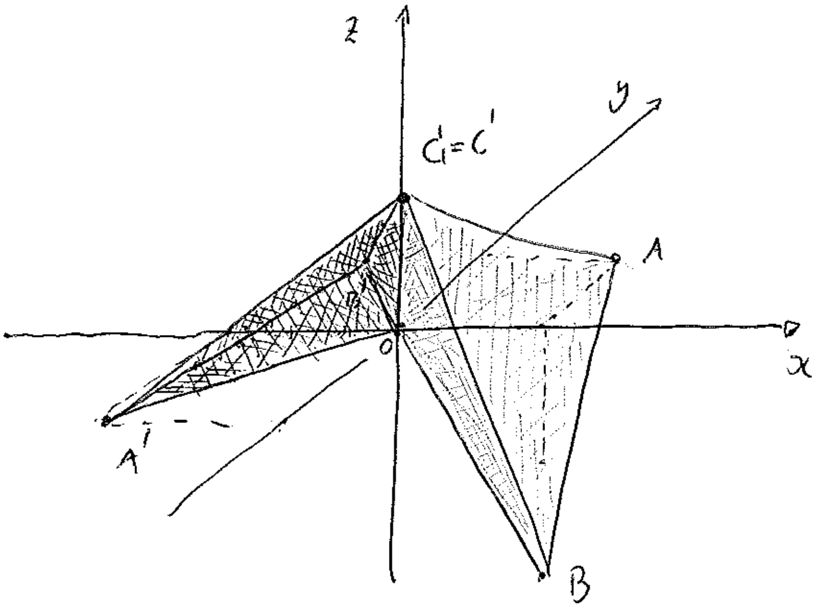
C': $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$ (retta OC)

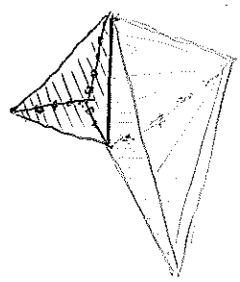
int. con π_2

$-t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1$

$C = C' : (0, 0, 1)$







volume del solido $OABCA'B'$ = volume di due tetraedri "incollati" lungo $OC = OC'$

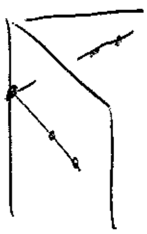
$$\mathrm{vol}\,(O\,ABC) = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}$$

$$\mathrm{vol}\,(O\,A'B'C') = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{18}$$

$$\mathrm{vol}\,(OABCA'B') = \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{3+1}{18} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

— · — · — · —

$A'B'$ e AB sono complanari, per come sono costruite, e devono intersecarsi in un punto, e lo stesso vale per gli altri lati omologhi.



Questo è un caso particolare del teorema di Desargues