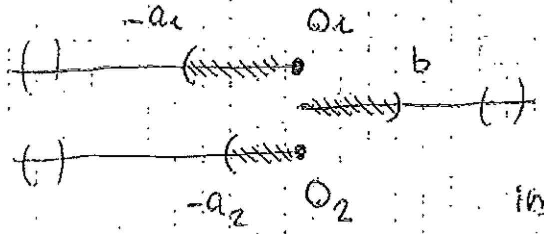
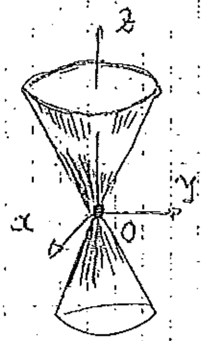
☆ Osservazione. Esistono spazi localmente euclidei ma non Hausdorff

Ricordiamo che:



intorni di O_i $\quad i=1,2$

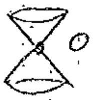
☆



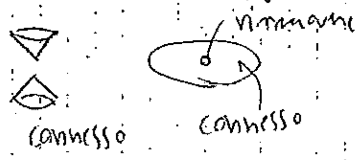
$$x^2+y^2-z^2=0$$

cono (doppio)

Non è una varietà
(top. indotta da $\mathbb{R}^3$)



non è omeo ad un aperto di $\mathbb{R}^2$!

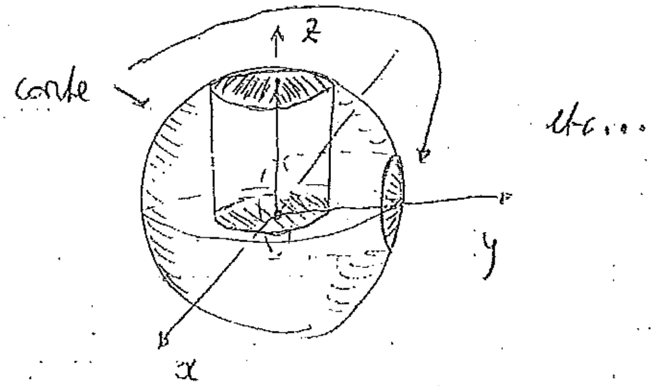


Invece
$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2=0 \\ z\geq 0 \end{cases}$$

è una varietà $\underline{C^0}$
(varietà topologica)

Sfera (unitaria) S^2

$$x^2+y^2+z^2-1=0$$



In maggiore dettaglio

$$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=1$$

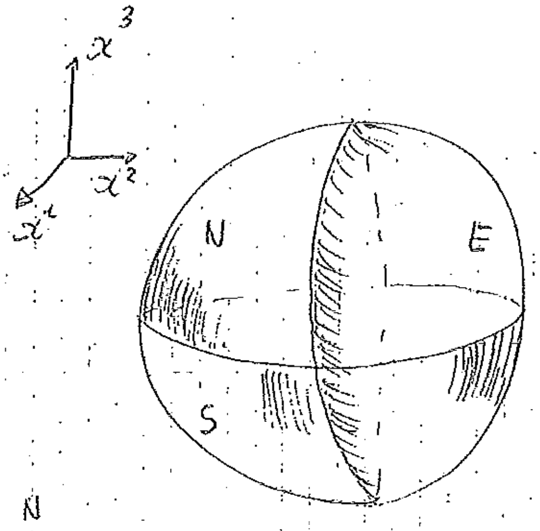
$$D_{i,\varepsilon}=\{(x^1,x^2,x^3)\in S^2 \mid \varepsilon x^i>0\}$$

$\varepsilon=\pm 1$

$$\varphi_{i,\varepsilon}: D_{i,\varepsilon}\longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\varphi_{i,\varepsilon}(x^1,x^2,x^3)=(x^j,x^k)$$

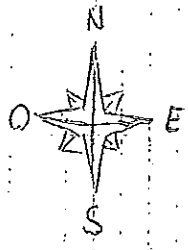
(i,j,k) permutazione ciclica di $(1,2,3)$ per $\varepsilon=1$
$(1,3\,2)$, $\varepsilon=-1$



$(i, \varepsilon) = (3, +) \equiv N$

$(i, \varepsilon) = (3, -) = S$

$(i, \varepsilon) = (2, +) = E$



$\varphi_N \circ \varphi_E^{-1}$ è data da

$\mathcal{C}^\infty$?

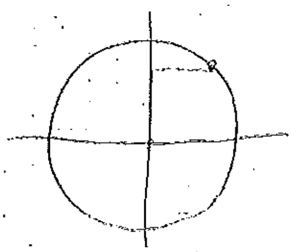
$$\boxed{\begin{cases} x_N^1 = x_E^2 \\ x_N^2 = \sqrt{1 - (x_E^1)^2 - (x_E^3)^2} \end{cases}}$$

Infatti:

$$\varphi_E(x^1, x^2, x^3) = \varphi_{(2,+1)}(x^1, x^2, x^3) = (x^3, x^1) = (z, x)$$

$$\varphi_N(x^1, x^2, x^3) = \varphi_{(3,+1)}(x^1, x^2, x^3) = (x^1, x^2) = (x, y)$$

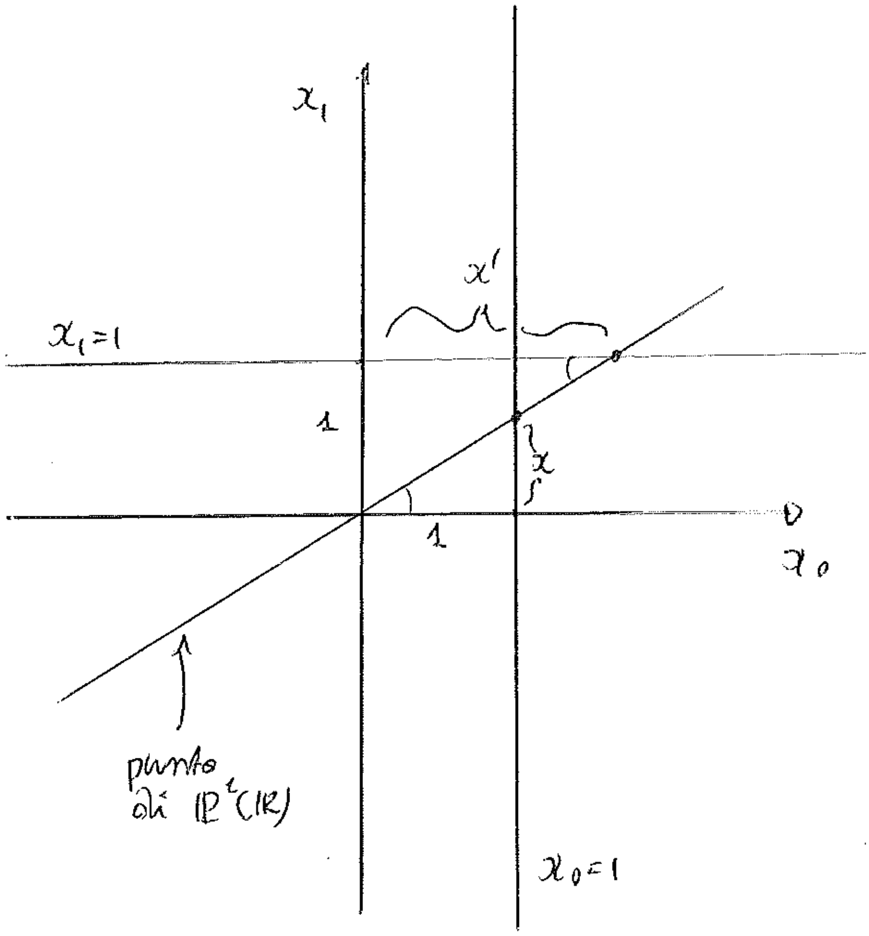
$$\begin{cases} x = z \\ y = \sqrt{1 - z^2 - x^2} \end{cases}$$



$$(z, x) \longmapsto \left(x, \sqrt{1 - z^2 - x^2}\right)$$

$\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

retta proiettiva reale



$$\mathcal{U}_0 \ni [\underset{\neq 0}{x_0}, x_1] \xmapsto{\varphi_0} \left(1, \underset{x}{\frac{x_1}{x_0}}\right) \equiv x$$

$$\mathcal{U}_1 \ni [x_0, \underset{\neq 0}{x_1}] \xmapsto{\varphi_1} \left(\underset{x'}{\frac{x_0}{x_1}}, 1\right) \equiv x'$$

$$\boxed{x' = \frac{1}{x}}$$

in $\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1$ è $x_0 \neq 0$, $x_1 \neq 0$

$$x \xmapsto{\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}} x' = \frac{1}{x}$$

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1}) \quad \text{spazi proiettivi: reale e complesso}$$
$$\phantom{\mathbb{P}^n(}\mathbb{C} \qquad\qquad \mathbb{C}$$

coord. omogenee

$$\varphi_i([x_0 \ldots\ldots x_n]) = \left(\frac{x_0}{x_i} \cdots \frac{\hat{x}_i}{x_i} \cdots \frac{x_n}{x_i}\right) \in \mathbb{R}^n, \ \mathbb{C}^n$$

se $x_i \neq 0$ $\quad \mathcal{U}_i = \{[x], x_i \neq 0\}$ $\quad$ (=1 omessa)

se anche $x_j \neq 0$

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x_1 \ldots\ldots x_n) = \left(\frac{x_1}{x_j} \cdots \underset{\text{omessa}}{\frac{\hat{x}_j}{x_j}}, \ldots \frac{1}{x_j}, \ldots \frac{x_n}{x_j}\right)$$

$$(x_1 \ldots x_n) \overset{\varphi_i^{-1}}{\longmapsto} [x_1 \ldots \overset{i}{1}, \ldots x_n] \in \mathbb{P}^n$$

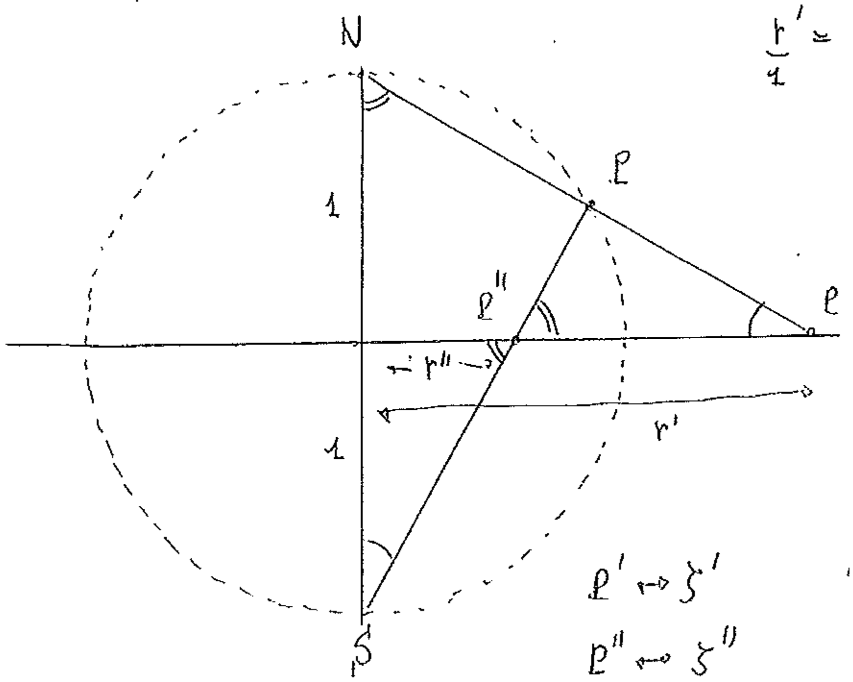
$$\left(= \left[\frac{x_1}{x_i}, \ldots \frac{\hat{x}_i}{x_i}, \ldots \frac{x_n}{x_i}\right]\right)$$

$$\overset{\varphi_j}{\longmapsto} \left(\frac{x_1}{x_j} \cdots \overset{j}{\frac{\hat{x}_j}{x_j}}, \ldots \overset{i}{\frac{1}{x_j}} \cdots \frac{x_n}{x_j}\right)$$

si omette

(che è C^∞ (e, nel caso complesso, olomorfa))

$S^2 \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$
(come superficie di Riemann)



$\frac{r'}{1} = \frac{1}{r''}$

$P' \mapsto \zeta'$, $r' = |\zeta'|$
$P'' \mapsto \zeta''$, $r'' = |\zeta''|$

relazione [con opportuni orientamenti]

$$\boxed{\zeta' = \frac{1}{\zeta''}} \qquad \text{se } P \notin \{N, S\}$$

in forma reale
$$x' + iy' = \frac{1}{x'' + iy''} = \frac{x'' - iy''}{x''^2 + y''^2}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{x''}{x''^2 + y''^2} \\ y' = \dfrac{-y''}{x''^2 + y''^2} \end{cases}$$

$U_N = S^2 \setminus \{N\}$
$U_S = S^2 \setminus \{S\}$

$S^2 = U_N \cup U_S$

$\varphi_N : P \to P'$
$\varphi_S : P \to P''$

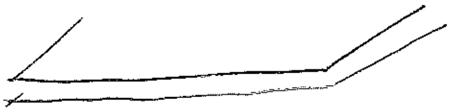
se $P \notin \{N, S\}$ sono definite entrambe

$$\varphi_N \circ \varphi_S^{-1} : \quad P'' \xmapsto{\varphi_S^{-1}} P \xrightarrow{\varphi_N} P'$$

$P'' \in$ piano equatoriale $\equiv \mathbb{C}$, $P' \in \mathbb{C}$

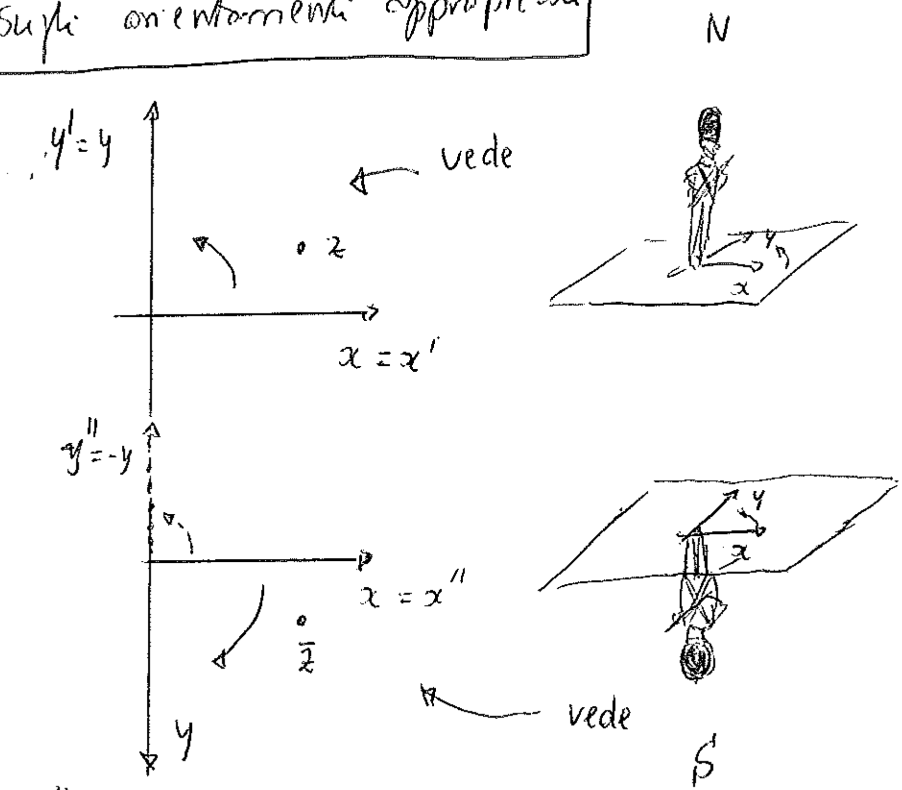
$$\zeta'' \longmapsto \zeta' = \frac{1}{\zeta''}$$

VIII - 2 - 6



← piano equatoriale "raddoppiato"

$\boxed{\text{Commento sugli orientamenti appropriati}}$



$$\overbrace{x''+iy''}^{\zeta''} = \frac{1}{\underbrace{x'+iy'}_{\zeta'}} = \overset{\zeta'}{\frac{x'-iy'}{x'^2+y'^2}}$$

notare

$$\begin{cases} x'' = \dfrac{x'}{x'^2+y'^2} \\[2ex] y'' = \dfrac{-y'}{x'^2+y'^2} \end{cases}$$

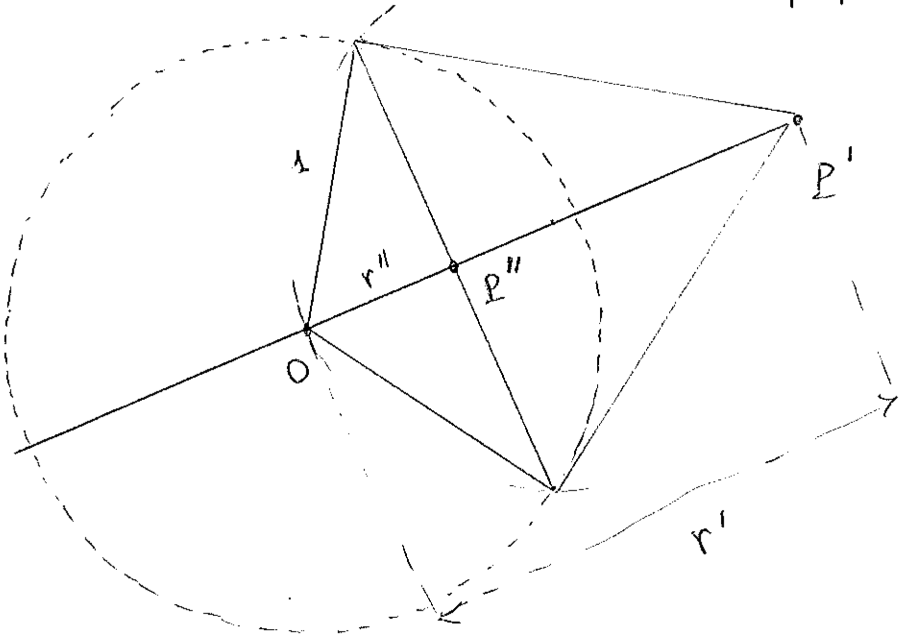
Altro commento

$\underline{P}'$ e $\underline{P}''$ sono legati da un' inversione circolare

$$\begin{array}{ccc} & \underline{P} & \\ \swarrow & & \searrow \\ \underline{P}' & \longleftrightarrow & \underline{P}'' \end{array}$$

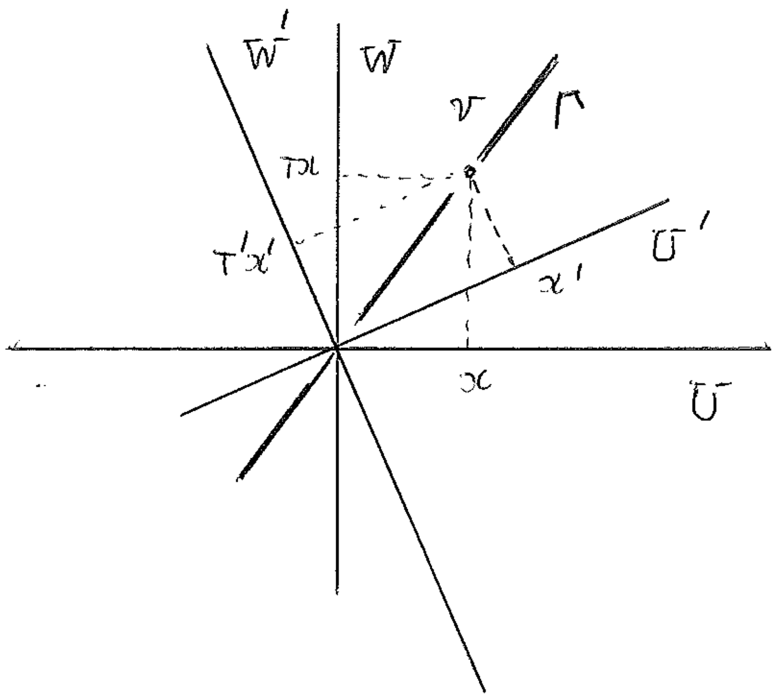
(N ↔ S) ! $O \longleftrightarrow \infty$ la geometria differenziale conferisce senso preciso a ciò

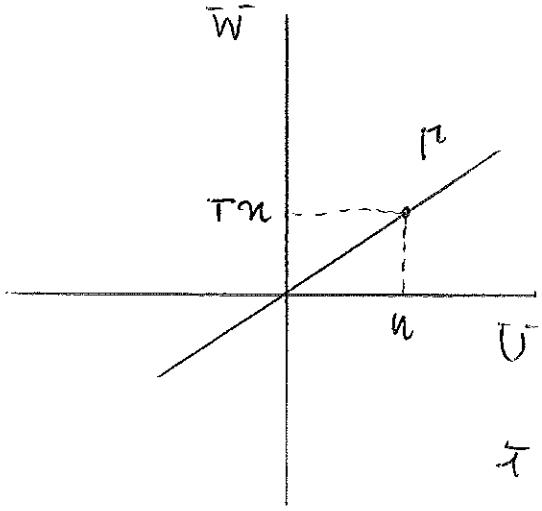
$r' \cdot r'' = 1$



☆ Struttura di varietà differenziabile su $Gr_k(\bar V) = \{ \bar U \leq \bar V \ / \dim \bar U = k \}$
$\dim \bar V = n$

Grassmanniana





Intanto, data $V = U \oplus \bar W$ (somma diretta)

ogni sottospazio Γ di dim k che abbia intersezione banale con $\bar W$

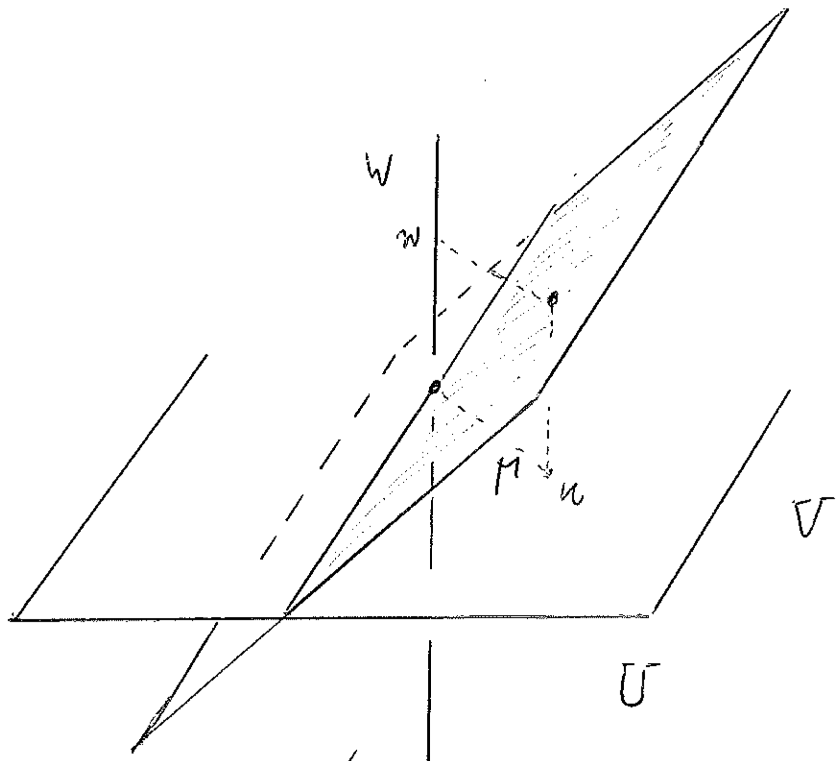
è grafico di un'unica applicazione lineare $T : \bar U \to \bar W$: infatti

sia $v \in \Gamma$: è $v = u + w$, con u e w univocamente determinati: si pone allora $\forall u \in \bar U$, $Tu = w$. Viceversa, dato $T : U \to W$ si pone $\Gamma = \{ u + Tu \}_{u \in \bar U}$

$$\mathcal{U}_{\bar W} := \{ \Gamma : \Gamma \cap \bar W = \{ \underline{0} \} \} \leftrightarrow \text{visti come grafici}$$

$$\Gamma = \mathrm{graph}(T) = \{ u + Tu \}$$

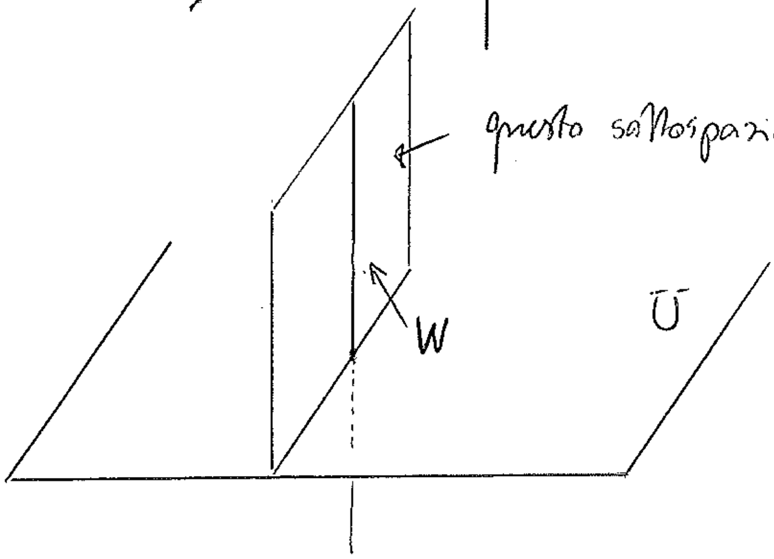
$\dim \Gamma = k$



$U \oplus W = V$

$W \oplus M = V$

M è grafico



questo sottospazio non è un grafico

(di $T: U \to W$

Formalmente

$$\varphi : \mathcal{U}_{W} \longmapsto \mathcal{L}(U, W)$$

$$\Gamma \longmapsto T_{\Gamma}$$

scegliendo basi, sono matrici

carta locale

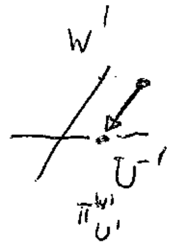
<u>Cambiamento di carta</u>: sia $v \in \Gamma$

(v. figura) $\qquad v = x + Tx = x' + T'x'$

<u>troviamo la relazione tra x e x'</u>, dato <u>quest'ultimo</u>.

$$I_T : U \to V : \quad I_T(x) = x + Tx$$

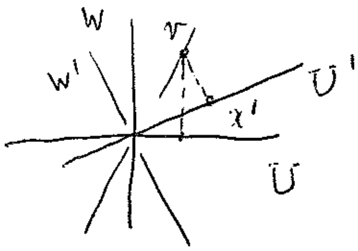
$\pi^{W'}_{U'}$ proiezione (obliqua) su U' lungo W'
$[\Rightarrow \operatorname{Im} \pi = U', \operatorname{Ker} \pi = W']$ along



⚠ x è tale che (ed è univocamente individuato)

$$\pi^{W'}_{U'}(\overbrace{x + Tx}^{v} - x') = 0$$

$[$i.e. $v - x' \in W']$



ovvero

$$\overset{A}{\left(\pi^{W'}_{U'} \circ I_T\right)} x - x' = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = A^{-1} x'$$

Pertanto $\qquad \boxed{T' \in \mathcal{L}(U', W')}$

$$T'x' = x + Tx - x' = I_T x - x' =$$

$$I_T \circ A^{-1} x' - x' = (I_T A^{-1} - Id) x'$$

$$\boxed{T' = (I_T \circ A^{-1} - Id)} \equiv \text{funzione liscia di } T$$

Inoltre, un insieme finito di carte è sufficiente, ogni s. spazio Γ si può ottenere a partire da $\bar{U} = \langle e_{i_1}, \dots e_{i_k} \rangle$ (opportuna partizione della base canonica) [come grafico]

Dim: si applichi l'algoritmo di Gauss ad un insieme di generatori di Γ, giungendo alla forma canonica speciale per righe ....

$$
\begin{array}{c c}
 & n \\
k\left\{ \right. & \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \times & \times & \times \\ & 1 & 0 & \times & \times & \times \\ & & 1 & & & \\ \hline & & 0 & & & \\ & & 0 & & & \end{array} \right) \\
n-k &
\end{array}
$$

Infine, dati due s.spazi di dim k, $\bar{U}$ e $\bar{U}'$, $\exists\ \underset{n-k}{\bar{W}}$ t.c. $\bar{W} \cap \bar{U} = \bar{W} \cap \bar{U}' = \{0\}$

$\Rightarrow$ U e U' sono contenuti nel dom della carta individuata da $(\bar{U}, \bar{W})$.