Foglio 7

Consegna entro mercoledì 26 novembe alle ore 11:30

Esercizio 1 (8 punti). Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da $f(x, y, z) = [x - z - y, 3y - x + z, x - 2z]^T$

1. Scrivere la matrice A associata a f rispetto alla base canonica su dominio e codominio.
2. Trovare il determinante di A.
3. f è un isomorfismo?
4. Si consideri la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_1 + e_3, e_2 - e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$. Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica sul dominio e la base $\mathcal{B}$ sul codominio.

Esercizio 2 (Punti 8). Si consideri la base $\mathcal{B} = \{(1,\ 0,\ 1)^T, (0,\ 1,\ 0)^T, (1,\ 1,\ 2)^T\}$ di $\mathbb{C}^3$. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che rispetto alla base $\mathcal{B}$ su dominio e codominio ha matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

1. trovare la matrice di f rispetto alla base canonica su dominio e codominio
2. trovare la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ sul dominio e alla base canonica sul codominio
3. trovare la matrice di f rispetto alla base canonica sul dominio e alla base $\mathcal{B}$ sul codominio
4. Trovare $\ker f$ e Imf

Esercizio 3 (Punti 8). Sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$ e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $f(v_1) = v_1 - v_3$, $f(v_2) = v_2 - v_3$, $f(v_3) = v_1 + 2v_2$.

1. trovare la matrice associata a f rispetto alla base $\mathcal{B}$ su dominio e codominio.
2. L'applicazione lineare f è iniettiva? È surettiva?
3. Esiste una applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g$ sia l'applicazione identica? si trovi una matrice associata a g.
4. Esiste una applicazione lineare $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $h \circ f$ sia l'applicazione identica? Si esprima $h(v_1)$, $h(v_2)$ e $h(v_3)$ come combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3.

Esercizio 4 (Punti 6).

1. Si determini una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $(0,\ 1, 1)^T \in \ker(f)$, $(2,\ 0,\ -1) \in$ Imf, $(0,\ 1,\ 2) \in$ Imf.
2. Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica su dominio e codomio.
3. Si trovi $\ker(f)$ e Imf