COGNOME _____ NOME _____ Matr. _____

Firma dello studente _____ **A**

# Analisi Matematica 1 (Corso di Laurea in Informatica e Bioinformatica) — 07.09.2012

**Tempo: 3 ore.**

**Prima parte: test a risposta multipla. Una ed una sola delle 4 affermazioni è corretta. Indicatela con una croce. È consentita una sola correzione per ogni domanda; per annullare una risposta ritenuta errata racchiuderla in un cerchio. Non si richiede la giustificazione della risposta data. Risposta esatta: 1.5 punti; risposta sbagliata: - 0.25 punti; risposta non data: 0 punti.**

✎ **Test 1:**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+e^{-x}}{2-\sqrt{x}} \log\left(1+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$$

vale

(A) $+\infty$ (B) $-1/2$ (C) $3/2$ ~~(D)~~ $-3$

✎ **Test 2:**

Sia dato $E := \{z \in \mathbb{C} : |z+2-i| = 1,\ |z-2+i| = 1\}$. Allora $E$

(A) contiene esattamente 4 punti ~~(B)~~ non contiene alcun punto (C) contiene esattamente un punto (D) contiene esattamente due punti

✎ **Test 3:**

L'insieme di definizione della funzione $f(x) = \sqrt{\ln x\,(1-\ln x)}$ è

~~(A)~~ $[1,e]$ (B) $(0,1]$ (C) $(0,e]$ (D) $[e,+\infty)$

✎ **Test 4:**

Se per $x > 1$, $f(x) = \int_1^{x^2} \frac{1}{t^3+1}\,dt$, allora $f'(x)$ vale

(A) $\frac{2x}{x^3+1}$ (B) $\frac{1}{x^3+1}$ ~~(C)~~ $\frac{2x}{x^6+1}$ (D) $\frac{x^2}{x^6+1}$

✎ **Test 5:**

Quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera?

(A) se $f$ continua allora ha massimo e minimo assoluti (B) se $f$ è limitata, allora ha massimo e minimo assoluti (C) se $f$ è limitata, allora ammette limite agli estremi del dominio ~~(D)~~ se $f$ è continua su $[a,b]$, allora $f$ è limitata

✎ **Test 6:**

Per quale valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\pi - x) & x \le 0 \\ \frac{\sin(\alpha x^2)}{xe^{2x} - \sin x} & x > 0 \end{cases}$$

è continua in $x = 0$?

(A) $\alpha = -3$ (B) $\alpha = 3$ (C) $\alpha = 2$ ~~(D)~~ $\alpha = -2$

**TEST 1** Dato che $x \to +\infty$, allora $\frac{1}{x\sqrt{x}} \to 0^+$ e pertanto $\log\left(1+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right) \sim \frac{1}{x\sqrt{x}}$ per $x \to +\infty$.

Quindi

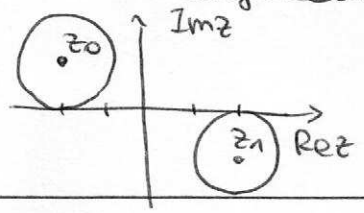
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+e^{-x}}{2-\sqrt{x}} \cdot \log\left(1+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+e^{-x}}{2-\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+e^{-x}}{2x\sqrt{x}-x^2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{1}{e^x x^2}}{\frac{2}{\sqrt{x}}-1} = -3.$$

La risposta corretta pertanto è la (D)

---

**TEST 2** Sia $z_0 \in \mathbb{C}$. Allora l'insieme $|z-z_0|=1$ rappresenta la circonferenza nel piano di Gauss di centro $z_0$ e raggio unitario. Dunque $|z+2-i|=1$ rappresenta la circonferenza (non il cerchio pieno!) di centro $z_0=-2+i$ e raggio 1. Analogamente $|z-2+i|=1$ rappresenta la circonferenza di centro $z_1=2-i$ e raggio 1. Si vede facilmente che le due circonferenze non hanno punti in comune, quindi la risposta corretta è la (B)




---

**TEST 3** Bisogna imporre esistenza radice: $\log x(1-\log x) \geq 0$ (1)
esistenza logaritmo: $x>0$ (2)

(1) è equivalente a $\begin{cases} \log x \geq 0 \\ 1-\log x \geq 0 \end{cases}$ oppure $\cancel{\begin{cases} \log x \leq 0 \\ 1-\log x \leq 0 \end{cases}}$ → non dà soluzioni reali

$\Downarrow$ $0 \leq \log x \leq 1 \iff 1 \leq x \leq e$ dalla monotonia del logaritmo

e messo a sistema con (2) rimane $x \in [1,e]$. La risposta corretta è pertanto la (A)

---

**TEST 4** Dal secondo teorema fondamentale del calcolo integrale si ha che la risposta corretta è la (C).

---

**TEST 5** La risposta corretta è la (D) perché se $f$ continua su $[a,b]$ dal teorema di Weierstrass $f$ ha massimo e minimo assoluti su $[a,b]$ e pertanto è limitata su $[a,b]$.

Controesempi alle altre risposte: (A)(B) $f(x)=\arctan x$
(C) $f(x)=\sin x$.

---

**TEST 6** Si deve avere $f(0)=-1=\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^+} f(x)$. Ora, $\lim_{x\to0^-} f(x) = f(0) = -1$

D'altra parte dagli sviluppi mi serve di Taylor

$$e^{2x} = 1+2x+2x^2+o(x^2)$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\sin(\alpha x^2)}{xe^{2x}-\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to0^+} \underbrace{\frac{\alpha x^2+o(x^3)}{\cancel{x}+2x^2+\underset{\downarrow\, 0}{2x^3}-\cancel{x}+\underset{\downarrow\, 0}{\frac{x^3}{6}}+o(x^3)}}_{\frac{\alpha}{2}} \overset{\text{deve essere}}{=} -1$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = -1 \Rightarrow \alpha = -2$$

La risposta corretta è la (D)

Analisi Matematica 1 (Corso di Laurea in Informatica e Bioinformatica) — 07.09.2012

**Esercizio (3 punti)**

Studiare la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^3}{1+3^n}.$$

Si tratta innanzitutto di una serie a termini non negativi. Possiamo applicare il criterio del rapporto. Ponendo

$a_n = \dfrac{2^n \cdot n^3}{1+3^n}$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)^3}{1+3^{n+1}} \cdot \frac{1+3^n}{2^n \cdot n^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\to 0}^3 \cdot 2 \cdot \frac{\cancel{3^n}\left[\overbrace{\frac{1}{3^n}}^{\to 0}+1\right]}{\cancel{3^n}\left[3+\underbrace{\frac{1}{3^n}}_{\to 0}\right]} = \frac{2}{3} < 1.$$

La serie data pertanto converge.

**Esercizio (5 punti)**

Determinare l'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale

$$\int_0^1 \frac{x^{3/2}}{\log(1+2x^\alpha)(1-\cos\sqrt{x})}$$

è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente.

Si tratta di un integrale improprio (con problema in 0) e funzione integranda non negativa. Quindi l'idea è quella di usare il teorema 8.9.10 a pagina 196 delle dispense cercando di confrontare l'integrale dato con un integrale più semplice, per esempio $\int_0^1 \frac{1}{x^\beta}dx$ che è integrale improprio se $\beta > 0$ e converge se $\beta < 1$. Quindi vediamo il fatto che per $x \to 0^+$

$$\log(1+2x^\alpha) \sim 2x^\alpha \qquad 1-\cos\sqrt{x} \sim \frac{(\sqrt{x})^2}{2} = \frac{x}{2}$$

Si ha pertanto

$$\frac{x^{3/2}}{\log(1+2x^\alpha)(1-\cos\sqrt{x})} \sim \frac{x^{3/2}}{\cancel{2}x^\alpha \cdot \frac{x}{\cancel{2}}} = x^{\frac{3}{2}-1-\alpha} = x^{\frac{1}{2}-\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-\frac{1}{2}}}.$$

Pertanto dal teorema citato l'integrale dato si comporta come $\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-1/2}}dx$ che converge ed è integrale improprio se $0 < \alpha - \frac{1}{2} < 1 \iff \frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}$.

Analisi Matematica 2 (Corso di Laurea in Informatica e Bioinformatica) — 07.09.2012

✎ **Esercizio (8 punti)**

Studiare la funzione:

$$f(x) = \frac{|4x^2 - 3x|}{e^{2x}}$$

e rappresentarne il grafico. Sono richiesti i punti di flesso.

Osserviamo prima di tutto che la funzione data deve essere è sempre maggiore o uguale a 0. D'altra parte il dominio è tutto $\mathbb{R}$ perché $e^{2x}$ non si annulla mai. Inoltre $f(x)=0$ se $|4x^2-3x|=0 \iff x=0 \vee x=\frac{3}{4}$. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ dalla gerarchia degli infiniti ($\lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 0^+$)

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ ma di nuovo dalla gerarchia degli infiniti tale limite esiste e fa 0.

Osserviamo che $4x^2-3x>0 \iff (4x-3)x>0 \iff x<0 \vee x>\frac{3}{4}$.

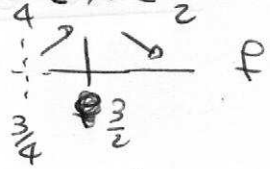
Quindi
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^2-3x}{e^{2x}} =: g_1(x) & \text{se } x<0 \vee x>\frac{3}{4} \\ \dfrac{3x-4x^2}{e^{2x}} =: g_2(x) & \text{se } 0<x<\frac{3}{4} \end{cases}$$

Si ha dunque $g_1'(x) = \dfrac{(8x-3)e^{2x} - 2e^{2x}(4x^2-3x)}{e^{4x}} = \dfrac{e^{2x}[-8x^2+14x-3]}{e^{4x}}$

Quindi se $x<0$ $g_1'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrescente.

D'altra parte $g_1'(x)>0 \iff -8x^2+14x-3>0 \iff \frac{1}{4}<x<\frac{3}{2}$

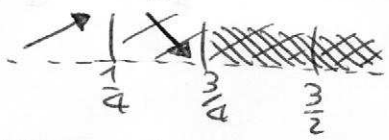
Essendo $\frac{3}{4}<\frac{3}{2}$ si ha che nell'intervallo $[\frac{3}{4},\infty)$ la $f$ ha un massimo locale per $x=\frac{3}{2}$.

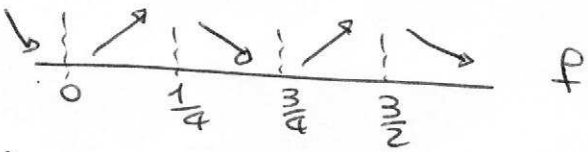



Infine $g_2'(x) = \dfrac{(3-8x)e^{2x} - 2e^{2x}(3x-4x^2)}{e^{4x}} = \dfrac{e^{2x}(8x^2-14x+3)}{e^{4x}}$

Si ha che $g_2'(x)>0$ se $x<\frac{1}{4} \vee x>\frac{3}{2}$ ma $f(x)=g_2(x)$ se $0<x<\frac{3}{4}$

Quindi questo significa che e pertanto $f$ ha un massimo locale anche per $x=\frac{1}{4}$. Riassumendo



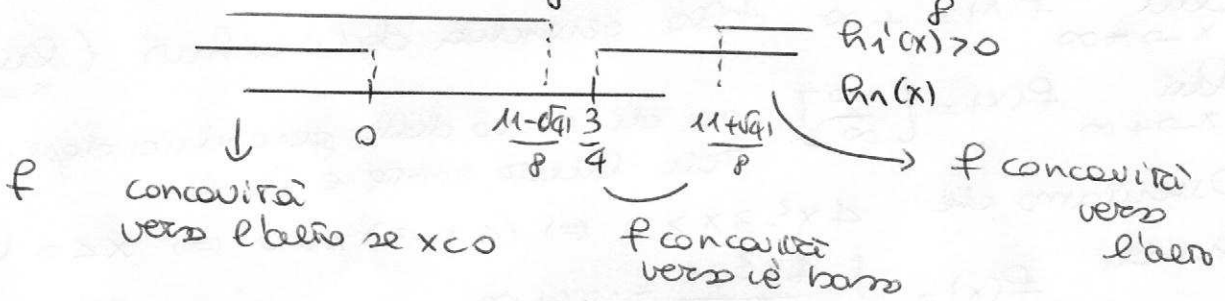

Studio della derivata seconda

Poniamo: $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-8x^2+14x-3}{e^{2x}} =: h_1(x) & x<0 \vee x>\frac{3}{4} \\[2ex] \dfrac{8x^2-14x+3}{e^{2x}} =: h_2(x) & 0<x<\frac{3}{4} \end{cases}$

Si ha

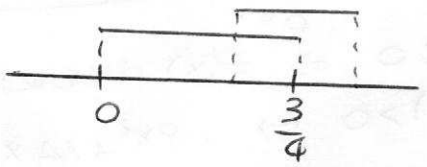
$$h_1'(x) = \frac{(-16x+14)e^{2x} - 2e^{2x}(-8x^2+14x-3)}{e^{4x}} = \frac{4}{e^{2x}}(4x^2-11x+5)$$

Ora, $h_1'(x) > 0 \iff x < \frac{11-\sqrt{41}}{8} \vee x > \frac{11+\sqrt{41}}{8}$

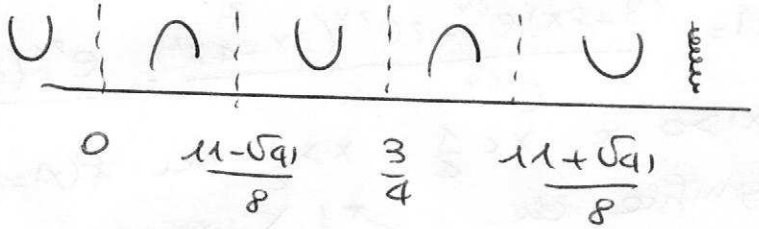



D'altra parte $h_2'(x) = -\frac{4}{e^{2x}}(4x^2-11x+5)$

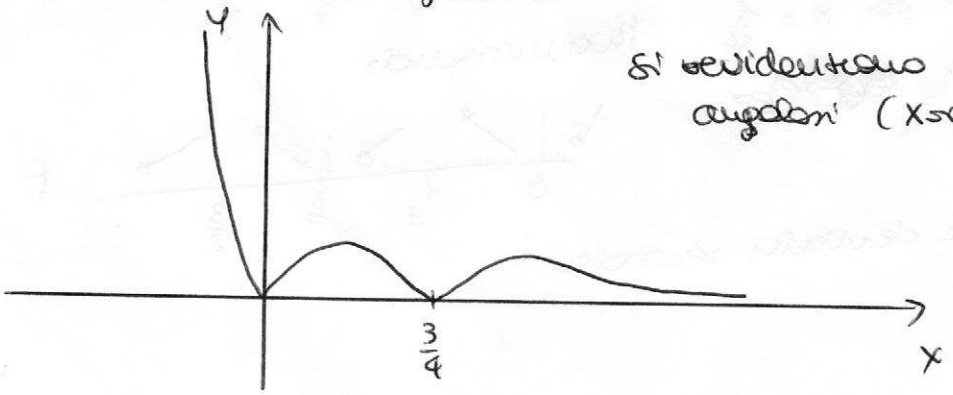
$h_2'(x) > 0 \iff \frac{11-\sqrt{41}}{8} < x < \frac{11+\sqrt{41}}{8}$




<u>Riassumendo:</u>




Il grafico qualitativo è il seguente




Si evidenziano 2 punti angolosi ($x=0$ e $x=\frac{3}{4}$)