Matematica e Statistica (A-E, F-O, P-Z)

Prova d'esame (09/09/2011)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2010/11

Matematica e Statistica (A-E, F-O, P-Z)

Prova di $\boxed{\text{MATEMATICA (A-E, F-O, P-Z)}}$ (09/09/2011)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2010/11

Cognome-Nome ________________________ Matr. ________ Corso ________

IN STAMPATELLO — VR ······ — A-E / F-O / P-Z

▶▶▶▶ **Test a quiz sul retro** ▶▶▶▶

(1) Nello spazio cartesiano determinare, in forma parametrica e cartesiana, il piano Π passante per $A(-1,0,3)$ e $B(0,1,1)$ e parallelo a $\vec{v}=(1,-1,0)$; e la retta r passante per B e $C(1,2,-1)$. Quali sono i punti di Π e di r più vicini all'origine?

(2) Studiare l'andamento di $f(x) = \dfrac{x\,\log|x|}{x-1}$, e tracciarne il grafico.[1]

(3) (a) Calcolare $\displaystyle\int_1^2 (x^2-1)\,f(x)\,dx$ (dove $f(x)$ è quella dell'ex. 2) e $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\ \mathrm{tg}^{\,2} x\ dx$.

(b) Disegnare $S=\{(x,y): -\sin(\frac{x}{2}) \le y \le x-x^3\,,\ |x|\le 1\}$, e calcolarne l'area.

(4) (a) Data $g(x,y) = \dfrac{x(y+1)}{x-y}$, determinarne dominio, zeri, segno e limiti interessanti, disegnando i risultati. Trovarne i punti stazionari ed eventuali estremi locali.

(b) Calcolare gli estremi assoluti di g sul triangolo $\mathcal{T}$ di vertici $A(-1,-2)$, $B(2,-2)$ e $C(2,1)$.

(5) Trovare tutte le soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale $y''+2y'+4y=4x^2$, e tutte quelle dell'equazione differenziale $xy'=\alpha x+2y$ (ove α è un parametro reale). Dire infine se, per qualche scelta di α, vi sono soluzioni comuni tra le due.

[1] Per lo studio della derivata sarà utile un confronto grafico. Non è richiesto lo studio della convessità.

Matematica e Statistica (A-E)

Prova di STATISTICA (A-E) - Gobbi (09/09/2011)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2010/11

Cognome-Nome ______________________________ Matr. ______________
IN STAMPATELLO VR · · · · · ·

**** Per ogni calcolo effettuato scrivere anche la formula teorica da utilizzare **** ▶▶▶▶ **Test a quiz sul retro** ▶▶▶▶

ESERCIZIO 1

X	Frequenza
0	88
2	56
6	37
10	19

Sulla distribuzione di frequenze presentata in tabella, calcolare:
a) la media aritmetica, la media armonica, la media geometrica e la media quadratica;
b) la mediana e la moda;
c) lo scarto quadratico medio.

ESERCIZIO 2

Dati i seguenti 3 gruppi di dati:

A
1
4
7

B
0
2
6
12

C
5
11

Calcolare:
a) la media e la varianza dei singoli gruppi;
b) la media e la varianza del miscuglio;
c) la media e la varianza dei gruppi presi in un unico insieme, evidenziando la relazione con la media e la varianza del miscuglio.

ESERCIZIO 3

La tabella seguente riporta i risultati di uno studio condotto su 3 campioni contenenti diversi tipi di cellule. Per ognuno di questi campioni si è provveduto a rilevare la numerosità delle cellule presenti, distinguendo fra cellule di tipo Procariotica, Eucariote animale ed Eucariote vegetale.

	Procariotica	Eucariote animale	Eucariote vegetale
Campione A	12	43	15
Campione B	28	5	7
Campione C	50	22	18

Calcolare:
a) la probabilità di analizzare una cellula proveniente dal campione C;
b) la probabilità che la cellula analizzata sia una Procariotica;
c) la probabilità che la cellula sia Procariotica oppure che provenga dal campione C (l'uno O l'altro);
d) la probabilità che la cellula sia Procariotica e che provenga dal campione C (l'uno E l'altro);
e) la probabilità che la cellula provenga dal campione A dato che è Eucariote vegetale.

Matematica e Statistica (F-O, P-Z)

Prova di STATISTICA (F-O, P-Z) - Di Palma (09/09/2011)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2010/11

Cognome-Nome ______________________________ Matr. ______________
IN STAMPATELLO VR ······

**** Attenzione: compiti illeggibili non verranno corretti ! **** ▶▶▶▶ **Test a quiz sul retro** ▶▶▶▶

Esercizio 1)
Un laboratorio farmaceuto vuole verificare l'affidabilità dei suoi fornitori di acqua borica. A questo scopo ha effettuato diverse misure di concentrazione del boro presente nelle diverse boccette, ottenendo i seguenti 11 dati espressi in punti percentuali

2.9500 3.0300 3.0000 3.0900 3.0400 2.9200 2.9600 3.0300 3.0600 3.0200 2.9000

Il candidato
a) Determini la tipologia del carattere.
b) Scelga una rappresentazione grafica idonea.
c) Definisca gli indici di posizione e, se possibile, ne calcoli uno adeguato alla serie.
d) Definisca gli indici di variabilità e, se possibile, ne calcoli uno adeguato alla serie.

Esercizio 2)
Si vuole verificare l'efficacia di un nuovo antibiotico chemiterapico utilizzare contro l'infezione dovuta ad un particolare batterio. A tale scopo si sono prese 100 cavie da laboratorio, le si sono infettate con il suddetto batterio ma solo metà di esse è stata sottoposta a trattamento con il nuovo farmaco. Dopo due settimane si è osservato l'estensione dell'infezione ottenendo le seguente tabella a doppia entrata:

		Y: estensione dell'infezione			
		Contenuta	Media	Estesa	
X: Trattamento	Non applicato		10		
	Applicato	10			
		15		60	

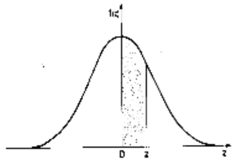
Il candidato
a) completi la tabella con i dati mancanti.
b) indichi e calcoli, se possibile, un opportuno indice di posizione per la serie bivariata
c) indichi e calcoli, se possibile, un opportuno indice di variabilità per la serie bivariata
d) se possibile, verifichi, ad un opportuno livello di significatività, l'efficacia del nuovo farmaco. Nel caso non fosse possibile indichi una possibile strategia per effettuare il calcolo.

Esercizio 3)
Si consideri la statitistca relativa all'acqua borica analizzata nell'Esercizio 1. Il candidato
a) verifichi, se possibile, che ad una significatività del 90% l'acqua borica abbia concentrazione pari al 3%;
b) stimi puntualmente la varianza della concentrazione dell'acqua borica fornita.

Esercizio 4)
Si considerino i due eventi relativi ai dati dell'Esercizio 2
E_1 : estraendo a caso una cavia, questa sia stata trattata con il nuovo farmaco.
E_2 : estraendo a caso una cavia della sperimentazione, questa abbia un'infezione contenuta.
Il candiato calcoli le probabilità dei seguenti eventi
a) E_1 ed E_2
b) evento E_1 intersezione E_2
c) evento E_2 condizionato E_1
d) evento E_2 unito E_1.

Tavola I

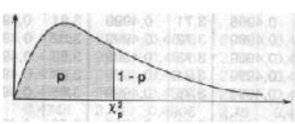
Integrali della variabile casuale normale standardizzata z



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

Tavola II

Integrali della variabile casuale chi quadrato a v gradi di libertà.



ν \ p	0,005	0,01	0,025	0,05	0,10	0,25	0,50	0,75	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
1	0,0000	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	0,102	0,455	1,32	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,8
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	0,575	1,39	2,77	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6	13,8
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	1,21	2,37	4,11	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8	16,3
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	1,92	3,36	5,39	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9	18,5
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	2,67	4,35	6,63	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7	20,5
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	3,45	5,35	7,84	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5	22,5
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	4,25	6,35	9,04	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3	24,3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	5,07	7,34	10,2	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0	26,1
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	5,90	8,34	11,4	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6	27,9
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	6,74	9,34	12,5	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2	29,6
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	7,58	10,3	13,7	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8	31,3
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	8,44	11,3	14,8	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3	32,9
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	9,30	12,3	16,0	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8	34,5
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	10,2	13,3	17,1	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3	36,1
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	11,0	14,3	18,2	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8	37,7
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	11,9	15,3	19,4	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3	39,3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	12,8	16,3	20,5	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7	40,8
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9	13,7	17,3	21,6	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2	42,3
19	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7	14,6	18,3	22,7	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6	43,8
20	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4	15,5	19,3	23,8	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0	45,3
21	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2	16,3	20,3	24,9	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4	46,8
22	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0	17,2	21,3	26,0	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8	48,3
23	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8	18,1	22,3	27,1	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2	49,7
24	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7	19,0	23,3	28,2	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6	51,2
25	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5	19,9	24,3	29,3	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9	52,6
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3	20,8	25,3	30,4	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3	54,1
27	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1	21,7	26,3	31,5	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6	55,5
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	22,7	27,3	32,6	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0	56,9
29	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8	23,6	28,3	33,7	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3	58,3
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	24,5	29,3	34,8	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7	59,7

Soluzioni

MATEMATICA (A-E, F-O, P-Z)

(1) Il piano Π passante per $A(-1,0,3)$ e $B(0,1,1)$ e parallelo a $\vec{v}=(1,-1,0)$ sarà parallelo anche al vettore $(0,1,1)-(-1,0,3)=(1,1,-2)$, dunque una forma parametrica è $\Pi=\{(0,1,1)+s(1,-1,0)+t(1,1,-2):s,t\in\mathbb{R}\}=\{(s+t,1-s+t,1-2t):s,t\in\mathbb{R}\}$; da $(x,y)=(s+t,1-s+t)$ si ricava $(s,t)=(\frac{x-y+1}{2},\frac{x+y-1}{2})$, che messo in $z=1-2t$ dà la forma cartesiana $x+y+z-2=0$. La retta r passante per B e $C(1,2,-1)$ sarà parallela al vettore $(1,2,-1)-(0,1,1)=(1,1,-2)$, dunque una forma parametrica è $r=\{(0,1,1)+t(1,1,-2):t\in\mathbb{R}\}=\{(t,1+t,1-2t):t\in\mathbb{R}\}$; sostituendo $x=t$ in $(y,z)=(1+t,1-2t)$ si ottiene una forma cartesiana facendo il sistema tra le equazioni $y=1+x$ e $z=1-2x$, ovvero $x-y+1=0$ e $2x+z-1=0$. • I punti di Π e di r più vicini all'origine possono essere caratterizzati dal fatto che il loro vettore posizione è ortogonale rispettivamente a Π e a r. Nel caso di Π, ciò si può esprimere dicendo che il vettore posizione $(s+t,1-s+t,1-2t)$ è parallelo a $(1,1,1)$ (vettore ortogonale a Π), ovvero che $s+t=1-s+t$ e $s+t=1-2t$, da cui $(s,t)=(\frac{1}{2},\frac{1}{6})$ e dunque il punto $(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$. Nel caso di r, si può dire che deve essere $(t,1+t,1-2t)\cdot(1,1,-2)=0$, ovvero $t+(1-t)-2(1-2t)=0$, che dà $t=\frac{1}{4}$ e dunque il punto $(\frac{1}{4},\frac{5}{4},\frac{1}{2})$.

(2) (Figura 1) La funzione $f(x)=\frac{x\log|x|}{x-1}$ è definita per $x\neq 0$ e $x\neq 1$, ed è derivabile infinite volte nel suo dominio; non ha parità ne' periodicità. Nel dominio si ha $f(x)=0$ se e solo se $x=-1$; vale poi $\log|x|>0$ se e solo se $|x|>1$, dunque studiando il segno si ha che $f(x)>0$ se e solo se $x<-1$ oppure $0<x<1$ oppure $x>1$. È però importante notare fin da subito che $\lim_{x\to 0^{\mp}} f(x)=0^{\mp}$ e $\lim_{x\to 1^{\mp}} f(x)=1^{\mp}$ (basta ricordare i limiti notevoli $\lim_{t\to 0} t\log|t|=0$ e $\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t}=1$), dunque $x=0$ e $x=1$ sono in realtà due singolarità eliminabili, in cui è possibile prolungare f per continuità con i valori rispettivamente di $f(0):=0$ e $f(1):=1$. Altri limiti interessanti sono $\lim_{x\to\mp\infty} f(x)=+\infty$, senza asintoti obliqui (in effetti all'infinito f ha andamento logaritmico). Derivando si ottiene $f'(x)=\frac{x-1-\log|x|}{(x+1)^2}$: si ha dunque $f'(x)=0$ quando $x-1=\log|x|$, e nel dominio ciò accade (come mostra un confronto grafico) solo quando $x=x_0$ per un opportuno x_0 in $]-1,0[$ (vale in realtà $x_0\sim -0{,}3$); similmente si ha $f'(x)>0$ quando $x-1>\log|x|$, che nel dominio accade quando $x_0<x<0$, $0<x<1$ o $x>1$. Pertanto x_0 è punto di minimo relativo (in realtà assoluto) con $f(x_0)=x_0\sim -0{,}4$; si ha inoltre che $\lim_{x\to 0} f'(x)=+\infty$ e, applicando due volte de l'Hôpital, $\lim_{x\to 1} f'(x)=\frac{1}{2}$: dunque per il prolungamento di f il punto $x=0$ è a pendenza verticale mentre in $x=1$ è derivabile, con $f'(1):=\frac{1}{2}$.

(3) (a) Si ha $\int_1^2 (x^2-1)\,f(x)\,dx=\int_1^2(x^2+x)\log|x|\,dx=((\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2)\log|x|]_1^2-\int_1^2(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2)\frac{1}{x}\,dx=(\frac{14}{3}\log 2)-(0)-(\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{4}x^2]_1^2=\frac{14}{3}\log 2-((\frac{17}{9})-(\frac{13}{36}))=\frac{14}{3}\log 2-\frac{55}{36}\sim 1{,}7$. • Ponendo $t=\cos x$ (dunque $dt=-\sin x\,dx$) vale $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x\ \mathrm{tg}^2 x\ dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\ dx=-\int_1^{\frac{1}{2}}\frac{1-t^2}{t^2}\,dt=\int_{\frac{1}{2}}^1(-\frac{1}{t}-t)\,dt=-((2)-(\frac{5}{2}))=\frac{1}{2}$.

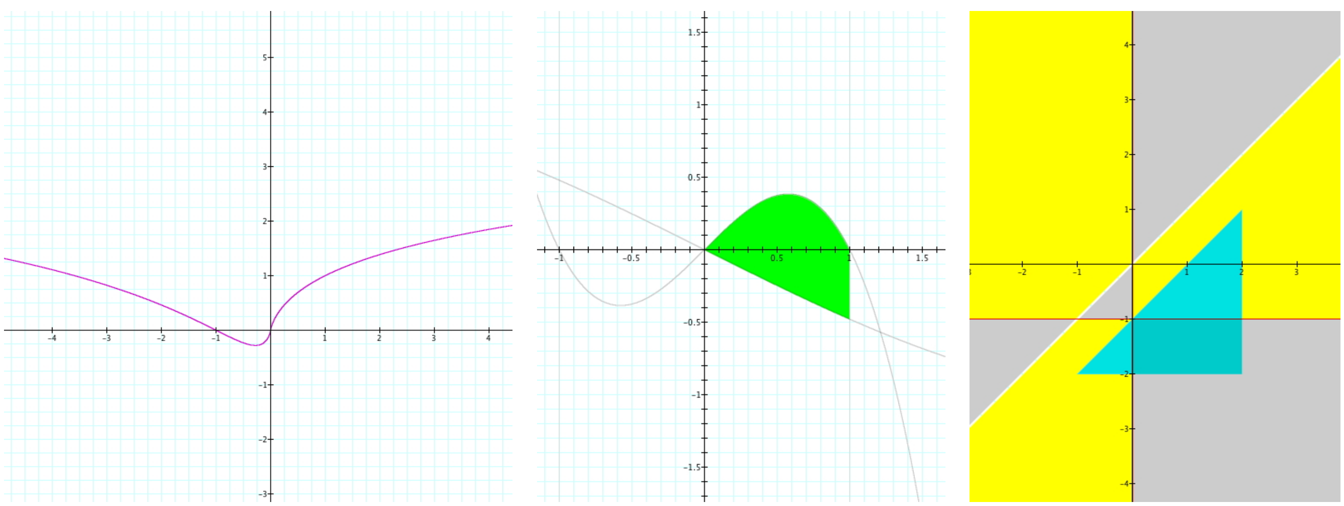
(b) (Figura 2) La zona di piano $S=\{(x,y):-\sin(\frac{x}{2})\le y\le x-x^3,\ |x|\le 1\}$ è quella sopra la sinusoide $y=-\sin\frac{x}{2}$, sotto la cubica $y=x-x^3$ e stretta tra le due rette verticali $x=\mp 1$, dunque ha area $\int_0^1(x-x^3)\,dx+\int_1^0(-\sin\frac{x}{2})\,dx=(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4]_0^1+(2\cos\frac{x}{2}]_1^0=(\frac{1}{4})-(0)+(2)-(2\cos\frac{1}{2})=\frac{9}{4}-2\cos\frac{1}{2}\sim 0{,}5$.

(4) (Figura 3) La funzione $g(x,y)=\frac{x(y+1)}{x-y}$ ha come dominio tutto il piano $\mathbb{R}^2$ meno la bisettrice $y=x$, ed è ivi differenziabile (in particolare continua) perché le sue derivate parziali $\frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{y(y+1)}{(x-y)^2}$ e $\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{x(x+1)}{(x-y)^2}$ sono evidentemente continue. Si ha $g(x,y)=0$ sui punti dell'asse y e della retta orizzontale $y=-1$ (esclusi i punti $O(0,0)$ e $P(-1,-1)$ che sono fuori dal dominio). Il fattore x è positivo a destra dell'asse y e negativo a sinistra, il fattore $y+1$ è positivo per $y>-1$ e negativo per $y<-1$, e il fattore $x-y$ è positivo sotto la bisettrice e negativo sopra: il segno di g ne segue per prodotto. I limiti interessanti sono quelli nei vari punti della bisettrice e in ∞_2. Se (x_0,x_0) è un punto della bisettrice diverso da P e O il limite di g in esso è $\mp\infty$ a seconda del lato a cui si tende al punto stesso (per capire il segno basta osservare lo studio del segno fatto in precedenza); invece nei punti P, O e ∞_2 il limite non esiste, perché tendendovi lungo le rette $x=0$ oppure $y=-1$ la funzione g tende a 0 mentre vicino alla bisettrice $|g|$ diventa arbitrariamente grande. Dal sistema $\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial y}=0$ si ricavano i punti stazionari $R(-1,0)$ e $S(0,-1)$ (oltre a O e P, che sono però da escludere); e se si calcola la matrice hessiana $\mathsf{H}_g(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{2y(y+1)}{(x-y)^3} & -\frac{2xy+x+y}{(x-y)^3}\\ -\frac{2xy+x+y}{(x-y)^3} & \frac{2x(x+1)}{(x-y)^3}\end{pmatrix}$ in R e S si ottiene $\mathsf{H}_g(R)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ e $\mathsf{H}_g(S)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, e il relativo criterio dice che si tratta di due punti di sella. Non vi sono dunque estremi locali per g.

(b) (Figura 3) Per la ricerca degli estremi assoluti di g sul triangolo $\mathcal{T}$ di vertici $A(-1,-2)$, $B(2,-2)$ e $C(2,1)$

(che esistono in base a Weierstrass) dividiamo $\mathcal{T}$ nelle zone $\mathcal{T}_0$ dei suoi punti interni; $\mathcal{T}_1$ del lato orizzontale $\overline{AB}$ privato dei vertici; $\mathcal{T}_2$ del lato obliquo $\overline{AC}$ privato dei vertici; $\mathcal{T}_3$ del lato verticale $\overline{BC}$ privato dei vertici; e $\mathcal{T}_4 = \{A,\, B,\, C\}$ dei vertici. • Se massimo o minimo assoluti fossero assunti in un punto di $\mathcal{T}_0$, tale punto dovrebbe essere in particolare stazionario per g: come visto prima i soli punti stazionari sono R e S, che però sono al di fuori di $\mathcal{T}_0$. • Sul lato $\mathcal{T}_1$ la funzione vale $\varphi_1(x) := g(x,-2) = -\frac{x}{x+2}$ con $-1 < x < 2$. Se massimo o minimo assoluti fossero assunti in un punto di $\mathcal{T}_1$, in tale punto dovrebbe annullarsi la derivata $\varphi_1'(x) = -\frac{2}{(x+2)^2}$ ma ciò non accade mai. • Sul lato $\mathcal{T}_2$ la funzione vale $\varphi_2(x) := g(x, x-1) = x^2$ con $-1 < x < 2$. La derivata $\varphi_2'(x) = 2x$ si annulla in $x = 0$, dunque si ottiene il già noto punto S. • Sul lato $\mathcal{T}_3$ la funzione vale $\varphi_3(y) := g(2, y) = -2\frac{y+1}{y-2}$ con $-2 < y < 1$, la cui derivata non si annulla mai. • Infine, i punti A, B e C di $\mathcal{T}_4$ vanno tenuti presenti. • Gli estremi assoluti di g su $\mathcal{T}$ potranno dunque assunti solo nell'ambito dei quattro punti A, B, C, S: poiché $g(A) = 1$, $g(B) = -\frac{1}{2}$, $g(C) = 4$ e $g(S) = 0$, si può concludere che il massimo assoluto di g su $\mathcal{T}$ è 4 (assunto in C) e il minimo è $-\frac{1}{2}$ (in B).

(5) L'equazione differenziale $y'' + 2y' + 4y = 4x^2$ è del secondo ordine, lineare a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $t^2 + 2t + 4 = 0$ ha soluzioni $t = -1 \mp \sqrt{3}\, i$, dunque lo spazio di soluzioni dell'equazione omogenea associata è $y(x) = Ae^{-x}\cos(\sqrt{3}\,x) + Be^{-x}\sin(\sqrt{3}\,x) = e^{-x}(A\cos(\sqrt{3}\,x) + B\sin(\sqrt{3}\,x))$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$. Una soluzione particolare per la completa con $4x^2$ avrà la forma $\tilde{y}(x) = ax^2 + bx + c$, e il calcolo dà $(a, b, c) = (1, -1, 0)$; dunque lo spazio di soluzioni dell'equazione completa è $y(x) = e^{-x}(A\cos(\sqrt{3}\,x) + B\sin(\sqrt{3}\,x)) + x^2 - x$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$. • L'equazione differenziale $xy' = \alpha x + 2y$ è lineare del primo ordine, e per $x \neq 0$ si può scrivere nella forma $y' + p(x)y = q(x)$ con $p(x) = -\frac{2}{x}$ e $q(x) = \alpha$. Una primitiva di $p(x)$ è $P(x) = -2\log|x|$, e $\int e^{P(x)} q(x)\, dx = \int \frac{1}{x^2}\alpha\, dx = -\frac{\alpha}{x}$: dunque le soluzioni sono $y(x) = e^{-P(x)}(\int e^{P(x)} q(x)\, dx\; + k) = x^2(-\frac{\alpha}{x} + k) = kx^2 - \alpha x$ al variare di $k \in \mathbb{R}$ (si noti che queste soluzioni sono tutte definite anche per $x = 0$). Si hanno soluzioni comuni solo quando $\alpha = 1$, e si tratta della sola $y(x) = x^2 - x$ (ottenuta per $A = B = 0$ e $k = 1$).



1. Il grafico della funzione dell'ex. 2, con l'integrale (in giallo) richiesto nell'ex. (3.a). **2.** L'insieme dell'ex. (3.b). **3.** Ex. 4: zeri (rosso), segno positivo (giallo) e negativo (grigio) della funzione g. Il triangolo $\mathcal{T}$ (azzurro).

ESERCIZIO 1

Sulla distribuzione di frequenze presentata in tabella, calcolare:
a) la media aritmetica, la media armonica, la media geometrica e quadratica;
b) la mediana e la moda;
c) lo scarto quadratico medio.

x	f	x*f	x^2	x^2f
0	88	0	0	0
2	56	112	4	224
6	37	222	36	1332
10	19	190	100	1900
	200	**524**		**3456**

a) Calcolo della media aritmetica, armonica e geometrica:

M(X) = $\dfrac{\Sigma x * f}{\Sigma f} = \dfrac{524}{200} =$ **2,62**

Ma(X) = **non è calcolabile**, perché una delle x è uguale a zero

Mg(X) = **è nulla**, perché una delle x è uguale a zero

M_2(X) = $\sqrt{\dfrac{\sum Xi^2 * fi}{\sum fi}}$ = RADQ($\dfrac{3456}{200}$) = $\sqrt{17,28}$ = **4,16**

b) Calcolo della mediana e della moda:

x100°=< mediana =< x101°: **me** = **2**

moda = **0**

c) Calcolo dello scarto quadratico medio:

V(X) = $M(x^2) - m^2 = \dfrac{3456}{200} - 2,62\text{^}2 =$ 10,4156

σ(X) = $\sqrt{10,4156} =$ **3,2273**

ESERCIZIO 2

Dati i seguenti 3 gruppi, calcolare:
a) la media e la varianza dei singoli gruppi;
b) la media e la varianza del miscuglio;
c) la media e la varianza dei gruppi presi in un unico insieme, evidenziando la relazione con la media e la varianza del miscuglio.

A	A^2
1	1
4	16
7	49
12	**66**

B	B^2
0	0
2	4
6	36
12	144
20	**184**

C	C^2
5	25
11	121
16	**146**

a) Calcolo della media e della varianza dei singoli gruppi:

$$M(A) = \frac{12}{3} = \mathbf{4} \qquad V(A) = \frac{66}{3} - 4\text{^}2 = \mathbf{6}$$

$$M(B) = \frac{20}{4} = \mathbf{5} \qquad V(B) = \frac{184}{4} - 5\text{^}2 = \mathbf{21}$$

$$M(C) = \frac{16}{2} = \mathbf{8} \qquad V(C) = \frac{146}{2} - 8\text{^}2 = \mathbf{9}$$

b) Calcolo della media e della varianza del miscuglio:

$$M(misc) = \frac{M(A)*n_A + M(B)*n_B + M(C)*n_C}{n_A + n_B + n_C} = \frac{4*3 + 5*4 + 8*2}{4 + 3 + 2} = \mathbf{5{,}3333}$$

$$V(misc) = \frac{V(A)*n_A + V(B)*n_B + V(C)*n_C}{n_A + n_B + n_C} + \frac{(M(A)-M_{misc})^2 *n_A + (M(B)-M_{misc})^2 *n_B + (M(C)-M_{misc})^2 *n_C}{n_A + n_B + n_C}$$

$$V(misc) = \frac{6 * 3 + 21 * 4 + 9 * 2}{3 + 4 + 2} + \frac{(4-5{,}3333)\text{^}2 * 3 + (5-5{,}3333)\text{^}2 * 4 + (8-5{,}3333)\text{^}2 * 2}{3 + 4 + 2}$$

$$= \frac{120}{9} + \frac{20}{9}$$

$$= \mathbf{15{,}5556}$$

c) Calcolo della media e della varianza dei gruppi presi in un unico insieme, evidenziando la relazione con la media e la varianza del miscuglio.

Unisco in un unico insieme X i 3 gruppi A, B e C:

X	X^2
1	1
4	16
7	49
0	0
2	4
6	36
12	144
5	25
11	121
48	**396**

$$M(X) = \frac{48}{9} = \mathbf{5{,}3333}$$

$$V(X) = M(x^2)-m^2 = \mathbf{15{,}5556}$$

La media e la varianza dei dati presi in un unico insieme X è uguale alla media e alla varianza del miscuglio.

ESERCIZIO 3

La tabella seguente riporta i risultati di uno studio condotto su 3 campioni contenenti diversi tipi di cellule.
Per ognuno di questi campioni si è provveduto a rilevare la numerosità delle cellule presenti, distinguendo fra cellule di tipo Procariotica, Eucariote animale ed Eucariote vegetale.

	Procariotica	Eucariote animale	Eucariote vegetale	
Campione A	12	43	15	**70**
Campione B	28	5	7	**40**
Campione C	50	22	18	**90**
	90	**70**	**40**	**200**

Calcolare:
a) la probabilità di analizzare una cellula proveniente dal campione C;
b) la probabilità che la cellula analizzata sia una Procariotica;
c) la probabilità che la cellula sia Procariotica oppure che provenga dal campione C (l'uno O l'altro);
d) la probabilità che la cellula sia Procariotica e che provenga dal campione C (l'uno E l'altro);
e) la probabilità che la cellula provenga da A dato che è Eucariote vegetale.

a) la probabilità di analizzare una cellula proveniente dal campione C

$$P(\text{camp. C}) = \frac{90}{200} = \mathbf{0,45}$$

b) la probabilità che la cellula analizzata sia una Procariotica

$$P(\text{Procar.}) = \frac{90}{200} = \mathbf{0,45}$$

c) la probabilità che la cellula sia Procariotica oppure che provenga dal campione C (l'uno O l'altro)

P(Procar. U camp C) =

$$P(\text{Procar.}) + P(\text{camp.C}) - P(\text{Procar.} \cap \text{Camp.C})$$

bisogna togliere l'intersezione perché sono compatibili

$$\frac{90}{200} + \frac{90}{200} - \frac{50}{200} =$$

$$0,45 + 0,45 - 0,25 = \mathbf{0,65}$$

d) la probabilità che la cellula sia Procariotica e che provenga dal campione C (l'uno E l'altro)

$$P(\text{Procar.} \cap \text{Camp.C})$$

$$\frac{50}{200} = \mathbf{0,25}$$

e) la probabilità che la cellula provenga da A dato che è Eucariote vegetale

$$P(\text{A/Veget.}) = \frac{P(\text{A} \cap \text{Veget})}{P(\text{Veget})}$$

$$P(\text{A/Veget.}) = \frac{\frac{15}{200}}{\frac{40}{200}} = \frac{15}{200} * \frac{200}{40} = \mathbf{0,375}$$

Esercizio 1)

a) Determini la tipologia del carattere.

Il carattere è di tipo quantitativo (in quanto espresso da numeri) continuo (in quanto si vuole monitorare una concentrazione che concettualemente è continua).

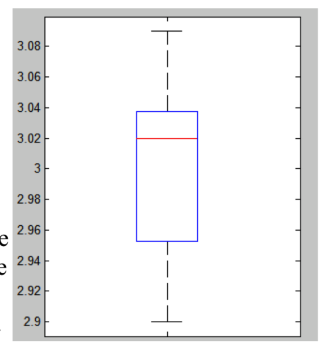
b) Se possibile, tracci una rappresentazione adeguata.

Poichè non vi sono molti dati ripetuti, ed essi sono in numero superiore alla decina (N=*11*) una buona rappresentazione è data dal box-plot. Il box-plot è una rappresentazione grafica utile per rappresentare dati quantitativi siano essi continui o discreti. Deve essere infatti possibile calcolare i quartili delle osservazioni e poter svolgere semplici operazioni di conto. Come primo passo si debbono ordinare le osservazioni

2.90 2.92 2.95 2.96 3.00 3.02 3.03 3.03 3.04 3.06 3.09

e valutare i quartitili. Il primo quartile è quell'osservazione che lascia alla sua sinistra un quarto delle restanti osservazioni (ovvero $\frac{N-1}{4}=2.5$) poichè il numero non risulta tondo il primo quartile si otterra medianto la terza e la quarta osservazione ordinate; con una procedura analoga si ottiene che il terzo quartile sarà la media fra la 8ª e la 9ª osservazione. Mentra la mediana risulta essere il valore che ha alla sua sinistra $\frac{N-1}{2}=5$ osservazioni. Pertanto si ha:

$$q_1=\frac{o_3+o_4}{2}=\frac{2.95+2.96}{2}=2.955 \qquad q_2=o_6=3.02$$
$$q_3=\frac{o_8+o_9}{2}=\frac{3.03+3.04}{2}=3.035$$



Per poter tracciare il box-plot si devono identificare gli estremi dei due "baffi" che completano il boxplot. Il baffo inferiore viene delimitato dal massimo fra il valore adiacente inferiore (VAI) e la minima osservazione ($o_1=2.90$); mentre il baffo superiore viene delimitato dal massimo fra il valore adiacente inferiore (VAI) e la massima osservazione ($o_N=3.09$). Posto la costante k=*1.5* si ha che:

$$VAI=q_1-1.5*(q_3-q_1)=2.835 \qquad VAS=q_3+1.5*(q_3-q_1)=3.155$$

Da cui si ricava agevolemte diagramma a lato in cui si nota l'assenza di outliers.

c*) Definisca gli indici di posizione e, se possibile, ne calcoli uno adeguato alla serie..*

Gli indici di posizione calcolabili sono tre: la media (ricavata dalla sequente formula $\bar{o}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}o_i=3$), la mediana introdotta al punto precedente e la moda (ovvero l'osservazione con frequenza più elevata).
Per questa serie l'unico indice che non pare adeguato è la moda che , pur essendo unica e calcolabile riferisce l'unica osservazione ripetuta della serie di dati (3.03)

d) Definisca gli indici di variabilità e, se possibile, ne calcoli uno adeguato alla serie.

Gli indici di variabilità indicano quanto le osservazioni si discostano dal valor centrale. Essi sono tutti validi per la serie in esame e sono i seguenti.

- Il campo di variazione: l'osservazione massima meno l'osservazione minima e vale $o_{11}-o_1=0.19$
- La distanza interquartile: la differenze fra il terzo ed il primo quartile $q_3-q_1=0.08$
- Lo scato quadratico medio (σ): radice quadrata della media degli scarti dalla media
$$\sigma^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(o_i-\bar{o}\right)^2=\frac{0.036}{11} \quad \text{da cui} \quad \sigma=\sqrt{\frac{0.036}{11}}=0.0572$$

I conti sono stati svolti nella tabella in calce.

o_i	2.9000	2.9200	2.9500	2.9600	3.0000	3.0200	3.0300	3.0300	3.0400	3.0600	3.0900
$o_i - \bar{o}$	-0.1000	-0.0800	-0.0500	-0.0400	0.0000	0.0200	0.0300	0.0300	0.0400	0.0600	0.0900
$(o_i - \bar{o})^2$	0.0100	0.0064	0.0025	0.0016	0.0000	0.0004	0.0009	0.0009	0.0016	0.0036	0.0081

Esercizio 2)

a) Completi la tabella con i dati mancanti.

La tabella si completa tenendo conto che la somma delle righe deve essere pari a 50 (metà delle cavie). Le frequenze assolute teoriche sono riportate nella tabella seguente (numeri non tra parentesi).

		Y: estensione dell'infezione			
		Contenuta	Media	Estesa	
X: Trattamento	Non Applicato	**5** *(7.5)*	10 *(12.5)*	**35** *(30)*	**50**
	Applicato	10 *(7.5)*	**15** *(12.5)*	**25** *(30)*	**50**
		15	**25**	60	**100**

b) Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di posizione

Una serie bivariata ottenuta misurando almeno un carattere qualitativo non ordinabile ammette un solo indice sintetico di posizione: la moda. La moda di una bi-variata si ottiene valutando la o le modalità della serie corrispondenti alla frequenza (assoluta o relativa) maggiore. Nel caso in esame la frequenza assoluta maggiore è 35 cui corrisponde la modalità (Non applicato; Estesa)

c) Se possibile, indichi e calcoli per la serie ottenuta un opportuno indice di variabilità

Una serie bivariata ottenuta misurando almeno un carattere qualitativio non ordinabile non ammette indice sintetici di variabilità in quanto non è possibile ottenere il concetto di distanza in maniera oggettiva.

d) Se possibile, verifichi, ad un opportuno livello di significatività, l'efficacia del nuovo farmaco. Nel caso non fosse possibile indichi una possibile strategia per effettuare il calcolo.

Un requisito di base richiesto dal nuovo farmaco è che la sua applicazione influisca sul carattere relativo alla diffusione del contagio ovvero che i due caratteri in esame siano dipendenti. Per verificare se i due caratteri sono indipendenti si può effettuare un test di ipotesi volto a verificare se le frequenze delle osservazioni rilevate nel campione sono sufficientemente vicine (ad un determinato livello di significatività) a quelle teoriche ottenute dall'ipotesi di indipendeza. Il test viene fatto sfruttando la distribuzione limite dello stimatore di Pizzetti Pearson che viene ad essere un chi quadrato avente gradi di libertà pari a quelli del numero di parametri liberi della distribuzione teorica. Il primo punto di questa procedura consiste nel calcolo delle frequenze teoriche ricavate dalle frequenze marginali ottenute orlando la tabella delle frequenze .

$$\hat{n}_{i,j} = n\,\hat{p}_{i,j} = \frac{n_{i,+}\,n_{+,j}}{n} \quad \forall i,j$$

le frequenze marginali e quelle teoriche fra parentesi sono state inserite nella tabella riportata al punto a).
A questo punto è possibile valutare la convergenza dello stimatore di Pizzetti Pearson, possibile solo se tutte le frequenze teoriche sono superiori a 5. Constatato che la condizione è verificata si ha che.

$$\sum_{i=1}^{M} \frac{\left(n_{i,j} - \hat{n}_{i,j}\right)^2}{\hat{n}_{i,j}} \sim \chi^2\big((M_x - 1)(M_y - 1)\big)$$

Poichè entrambi i caratteri della bivarianta hanno $M_x = 2$ e $M_y = 3$, la regione di accettazione per un test al 5 % è la seguente.

$$A = \left[0;\chi^2_{0.95}(2)\right] = [0;5.99]$$

Non rimane che da calcolare il valore dello stimatore e verificare se appartiene alla regione di accettazione.
Il valore dello stimatore è

$$\sum_{i=1}^{6} \frac{\left(n_{i,j} - \hat{n}_{i,j}\right)^2}{\hat{n}_{i,j}} = \frac{(5-7.5)^2}{7.5} + \frac{(10-12.5)^2}{12.5} + \frac{(35-30)^2}{30} + \frac{(10-7.5)^2}{7.5} + \frac{(15-12.5)^2}{12.5} + \frac{(15-12.5)^2}{12.5} + \frac{(25-30)^2}{30} = \frac{13}{3}$$

e risulta interno ad A. Quindi l'ipotesi di indipendenza viene accettata. Pertanto il farmaco è inefficace.

Esercizio 3)

Nel risolvere questo esercizio si ipotizza che la concnetrazione di boro, espressa in punti percentuali, presente nell'acqua fornita sia modellabile mediante una V.C. *X* da cui sono state effettuate diverse estrazioni i.i.d. .

a) verifichi, se possibile, che ad una significatività del 90% l'acqua borica abbia concentrazione pari al 3%

Continuando con il modello precedentemente definito il punto richiede di verificare l'ipotesi che che E[X]=3. La verifica di quest'ipotesi può essere realizzata, utilizzando gli strumenti forniti nel corso, solo se la dimensione del campione è pari a 30. Pertanto non è possibile vericare quest'ipotesi avendo a disposizione solo 11 valori.

b) stimi puntualmente la varianza della concentrazione dell'acqua borica fornita

Una stima puntale corretta della varianza di una V.C. mediante osservazioni i.i.d. può essere ottenuta mediante la varianza campionaria s2 ottenuta mediante la seguente formula.

$$s^2 = \sigma^2 \frac{n}{n-1}$$

quindi ricordando quando ricavato nell'esercizio 1 si ha che

$$s^2 = \sigma^2 \frac{n}{n-1} = \frac{0.036}{11} \frac{11}{10} = 0.0036$$

Pertanto la stima richiest è *Var*[*X*]= *0.0036*

Esercizio 4)

a) E_1 ed E_2

Le due probabilità possono essere calcolate utilzzando la definizione frequentistica, dove gli esiti favorevoli vengono determinati dalle marginali della tebella a doppia etrata dell'Esercizio 2.

$$P(E_1) = 50/100 = 0.5 \quad P(E_2) = 15/100 = 0.15$$

b) Il candiato calcoli Probabilità dell'evento E_1 intersezione E_2.

La probabilità dell'evento intersezione di due eventi (ovvero che i due eventi si verifichino entrambi) è ottenibile mediante la definizione frequentistica della probabilità. Si ha infatti ottenuti i casi favorevoli dalla tabella a doppia entrata (casella in posizione 2,1) si ha che

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{10}{100} = 0.1$$

c) Il candiato calcoli Probabilità dell'evento E_2 condizionato E_1

Applicando la defnzione di probabilità condizionata si ha che:

$$P(E_2 | E_1) = P\frac{(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)} = \frac{1/10}{1/2} = \frac{5}{100} = 0.05$$

d) Il candiato calcoli la Probabilità dell'evento E_1 unito E_2..

Note le probabilità degli eventi elementari e dell'evento intersezione si ha che

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{50}{100} + \frac{15}{100} - \frac{10}{100} = \frac{55}{100} = 0.55$$