# Introduzione alle reti di Petri

Viktor Teren, Tiziano Villa

Università degli Studi di Verona

# Definizioni fondamentali

# Reti di Petri

Una **rete di Petri** è una sestupla $N = (P, T, A, w, x_0)$ dove

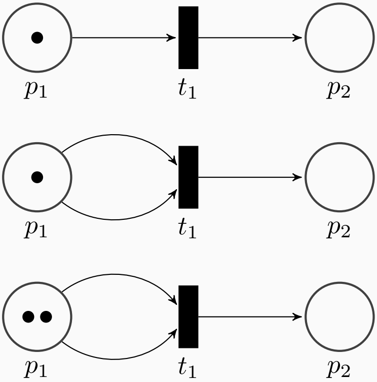
- $P$ è un insieme finito di **posti**
- $T$ è un insieme finito di **transizioni**
- $A$ è un insieme di **archi**, $A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$
- $w$ è una funzione di peso, $w : A \to \mathbb{N}$
- $\vec{x}_0$ è un vettore della marcatura iniziale, $\vec{x}_0 \in \mathbb{N}^{|P|}$

Sia $N = (P, T, A, w, \vec{x}_0)$ una rete di Petri. L'insieme $I(t) = \{p \in P \mid (p, t) \in A\}$ è l'insieme dei **posti in entrata** della transizione $t$. L'insieme $O(t) = \{p \in P \mid (t, p) \in A\}$ è l'insieme dei **posti in uscita** dell transizione $t$.

Una transizione $t$ è **attiva** nello stato $\vec{x}$ se

$$x(p) \geq w(p, t) \ \forall p \in I(t).$$

# Frammenti di reti di Petri



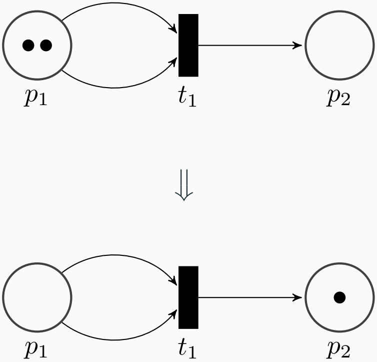
# Marcatura e funzione di transizione di una rete di Petri

Data una rete di Petri $N = (P, T, A, w, \vec{x}_0)$,con $P = \{p_0, \dots, p_{n-1}\}$, il vettore $\vec{x} = [x(p_0), \dots, x(p_{n-1})]$ è la **marcatura** o **stato** della rete, dove $x(p_i)$ indica il numero di gettoni del posto $p_i$. La marcatura si denota anche con la funzione $M$ dove $M(p_i)$ assegna al posto $p_i$ il numero di gettoni che esso contiene.

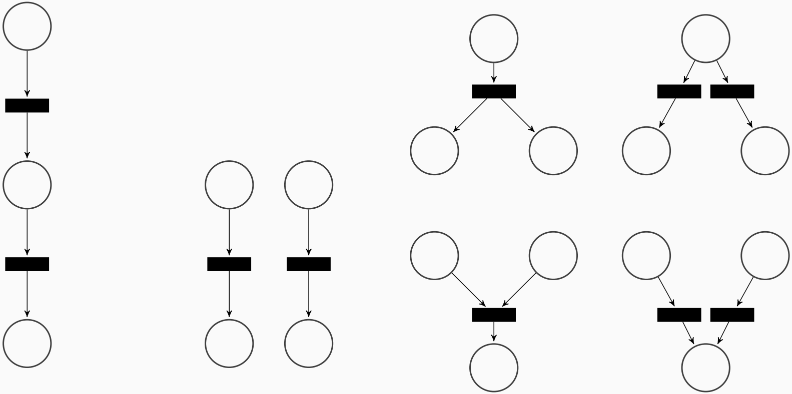
La **funzione di transizione** $G : (\mathbb{N}^n \times T) \to \mathbb{N}^n$ è definita come segue

$$
\begin{aligned}
G(\vec{x}, t) \quad &= \quad \begin{cases} \vec{x}' & \text{se } x(p) \geq w(p,t) \ \forall p \in I(t) \\ \vec{x} & \text{altrimenti} \end{cases} \\
\text{con} \quad & \quad \vec{x}' = [x'(p_0), \dots, x'(p_{n-1})] \\
& \quad x'(p_i) = x(p_i) - w(p_i, t) + w(t, p_i) \text{ per } 0 \leq i < n
\end{aligned}
$$

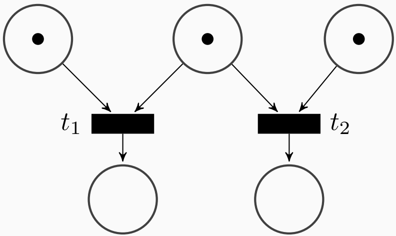
# Scatto di una transizione

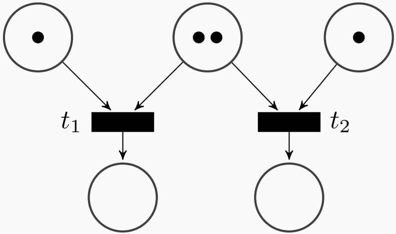


# Costrutti base



# Costrutti base: conflitto

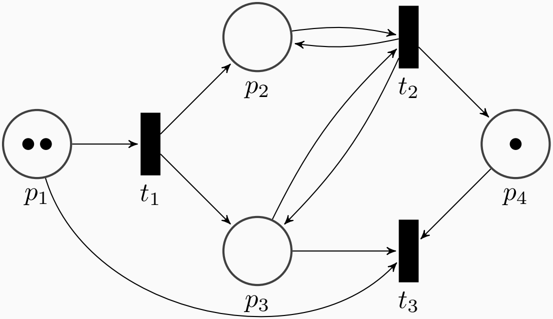


# Dinamica di una rete di Petri: esempio

Rete di Petri $N = (P, T, A, w, \vec{x}_0)$ con

$$
\begin{aligned}
P &= \{p_1, p_2, p_3, p_4\} \\
T &= \{t_1, t_2, t_3\} \\
A &= \{(p_1, t_1), (p_1, t_3), (p_2, t_2), (p_3, t_2), (p_3, t_3), (p_4, t_3), \\
&\quad (t_1, p_2), (t_1, p_3), (t_2, p_2), (t_2, p_3), (t_2, p_4)\} \\
w(a) &= 1 \forall a \in A \\
\vec{x}_0 &= [2, 0, 0, 1]
\end{aligned}
$$

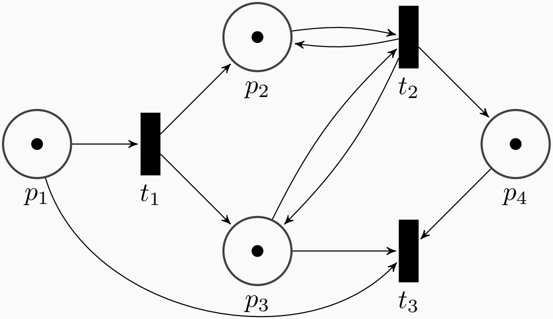



$\vec{x}_0 = [2, 0, 0, 1]$

# Dinamica di una rete di Petri: esempio

Rete di Petri $N = (P, T, A, w, \vec{x}_0)$ con

$$\begin{aligned}
P &= \{p_1, p_2, p_3, p_4\} \\
T &= \{t_1, t_2, t_3\} \\
A &= \{(p_1, t_1), (p_1, t_3), (p_2, t_2), (p_3, t_2), (p_3, t_3), (p_4, t_3), \\
&\quad (t_1, p_2), (t_1, p_3), (t_2, p_2), (t_2, p_3), (t_2, p_4)\} \\
w(a) &= 1 \forall a \in A \\
\vec{x}_0 &= [2, 0, 0, 1]
\end{aligned}$$

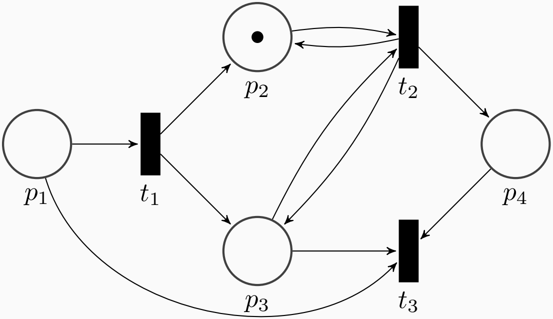



$$\vec{x}_0 = [2, 0, 0, 1] \;\big\downarrow t_1\; \vec{x}_1 = [1, 1, 1, 1]$$

# Dinamica di una rete di Petri: esempio

Rete di Petri $N = (P, T, A, w, \vec{x}_0)$ con

$$
\begin{aligned}
P &= \{p_1, p_2, p_3, p_4\} \\
T &= \{t_1, t_2, t_3\} \\
A &= \{(p_1, t_1), (p_1, t_3), (p_2, t_2), (p_3, t_2), (p_3, t_3), (p_4, t_3), \\
&\quad (t_1, p_2), (t_1, p_3), (t_2, p_2), (t_2, p_3), (t_2, p_4)\} \\
w(a) &= 1 \forall a \in A \\
\vec{x}_0 &= [2, 0, 0, 1]
\end{aligned}
$$




$$
\begin{aligned}
\vec{x}_0 &= [2, 0, 0, 1] \\
&\downarrow t_1 \\
\vec{x}_1 &= [1, 1, 1, 1] \\
&\downarrow t_3 \\
\vec{x}_2 &= [0, 1, 0, 0]
\end{aligned}
$$

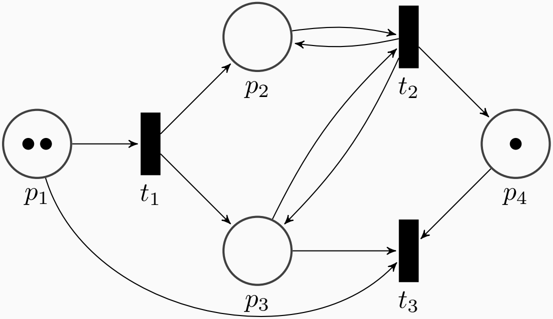
# L'insieme di raggiungibilità

Per una rete di Petri $N = (P, T, A, w, \vec{x}_0)$ e uno stato $\vec{x}$, uno stato $\vec{y}$ è **immmediatamente raggiungibile** da $\vec{x}$ se esiste una transizione $t \in T$ tale che $G(\vec{x}, t)) = \vec{y}$.

L'**insieme di raggiungibilità** $R(\vec{x})$ è l'insieme più piccolo di stati definito da

1. $\vec{x} \in R(\vec{x})$
2. Se $\vec{y} \in R(\vec{x})$ e $z = G(\vec{y}, t)$ per qualche $t \in T$, allora $\vec{z} \in R(\vec{x})$.

# L'insieme di raggiungibilità: esempio




$$
\begin{aligned}
\vec{x}_0 &= [2,0,0,1] \\
R(\vec{x}_0) &= R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4 \\
R_1 &= \{\vec{x}_0\} \\
R_2 &= \{\vec{y} \mid \vec{y} = [1,1,1,n], n \geq 1\} \text{ scatti } t_1, t_1 t_2^n \\
R_3 &= \{\vec{y} \mid \vec{y} = [0,2,2,n], n \geq 1\} \text{ scatti } t_1^2, t_1^2 t_2^n \\
R_4 &= \{\vec{y} \mid \vec{y} = [0,1,0,n], n \geq 0\} \text{ scatti } t_1 t_2^n t_3
\end{aligned}
$$

# Vettore degli scatti e matrice di incidenza

Sia $N = (P, T, A, w, \vec{x}_0)$ una rete di Petri con $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ e $T = \{t_1, \ldots, t_m\}$. Un **vettore di scatto** $\vec{u} = [0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0]$ è un vettore di lunghezza $m$ in cui l'elemento nella posizione $j$, $1 \leq j \leq m$, corrisponde alla transizione $t_j$. Tutti gli elementi del vettore sono $0$ eccetto uno, che ha valore $1$. Se l'elemento $j$ ha valore 1, la transizione $t_j$ scatta.

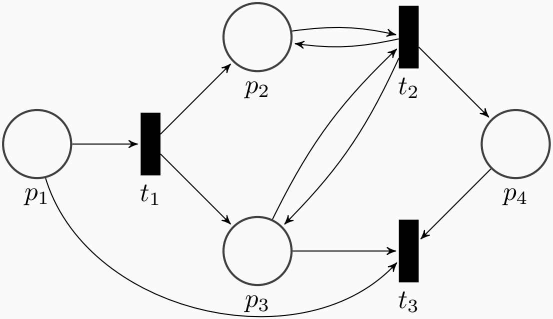
La **matrice di incidenza** $\mathcal{A}$ è una matrice $m \times n$ il cui elemento $(j, i)$ è

$$a_{j,i} = w(t_j, p_i) - w(p_i, t_j)$$

Un'equazione di stato può essere scritta come

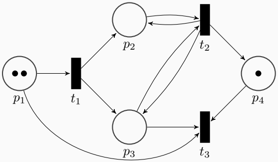
$$\underset{(1\times n)}{\vec{x}'} = \underset{(1\times n)}{\vec{x}} + \underbrace{\underset{(1\times m)(m\times n)}{\vec{u}\mathcal{A}}}_{(1\times n)}$$

# Matrice di incidenza: esempio

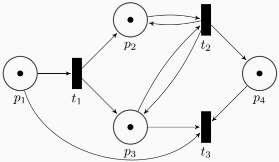



$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

# L'evoluzione delle equazioni di stato



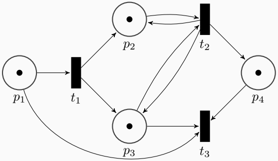

$\vec{x}_0 = [2,0,0,1]$



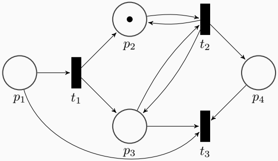

$\vec{x}_0 = [2,0,0,1]$
$\downarrow t_1$
$\vec{x}_1 = [1,1,1,1]$

$$\begin{aligned}
\vec{x}_1 &= \vec{x}_0 + \vec{u}_1 \boldsymbol{\mathcal{A}} \\
&= [2,0,0,1] + [1,0,0] \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\
&= [2,0,0,1] + [-1+0+0, 1+0+0, 1+0+0, 0+0+0] \\
&= [2,0,0,1] + [-1,1,1,0] = [1,1,1,1]
\end{aligned}$$

# L'evoluzione delle equazioni di stato




$\vec{x}_0 = [2,0,0,1]$
$\downarrow t_1$
$\vec{x}_1 = [1,1,1,1]$




$\vec{x}_0 = [2,0,0,1]$
$\downarrow t_1$
$\vec{x}_1 = [1,1,1,1]$
$\downarrow t_3$
$\vec{x}_2 = [0,1,0,0]$

$$\begin{aligned}
\vec{x}_2 &= \vec{x}_1 + \vec{u}_2 \boldsymbol{\mathcal{A}} \\
&= [1,1,1,1] + [0,0,1] \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\
&= [1,1,1,1] + [-1,0,-1,-1] = [0,1,0,0]
\end{aligned}$$

**Nota**: non è garantito che il risultato sia corretto se la transizione non è abilitata, ad esempio in $[0,1,0,0]$ la transizione $t_2$ non è abilitata, eppure otteniamo

$$[0,1,0,0] + [0,1,0]\boldsymbol{\mathcal{A}} = [0,1,0,0] + [0,0,0,1] = [0,1,0,1].$$

In qusto caso il problema sorge perchè $t_2$ consuma ed aggiunge un gettone in $p_3$, dove inizialmente non sono presenti gettoni.

# Valutazione di una sequenza di trasizioni

Sia $N = (P, T, A, w, \vec{x}_0)$ una rete di Petri e $T' = \langle t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots, t_n \rangle, t_i \in T$ una sequenza di $n$ transizioni con $\vec{u}_t$ il vettore transizione di $t$.

Lo stato dopo lo scatto di tutte le transizioni in $T'$ è

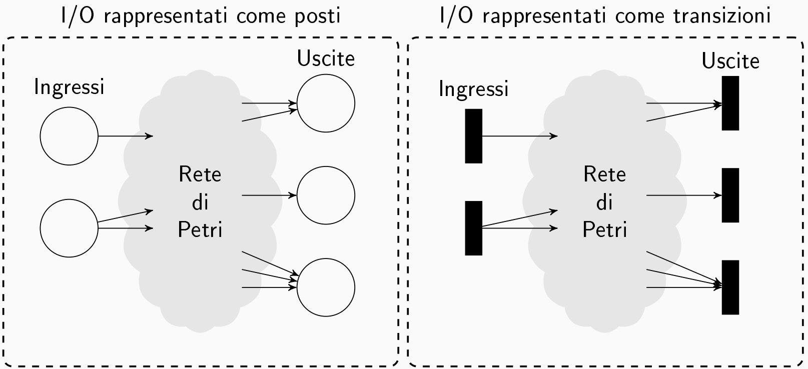
$$\vec{x}_n = \vec{x}_0 + (\sum_{t \in T'} \vec{u}_t)\boldsymbol{\mathcal{A}}$$

a condizione che, per tutti i $t_i \in T'$, $t_i$ sia attivata nello stato

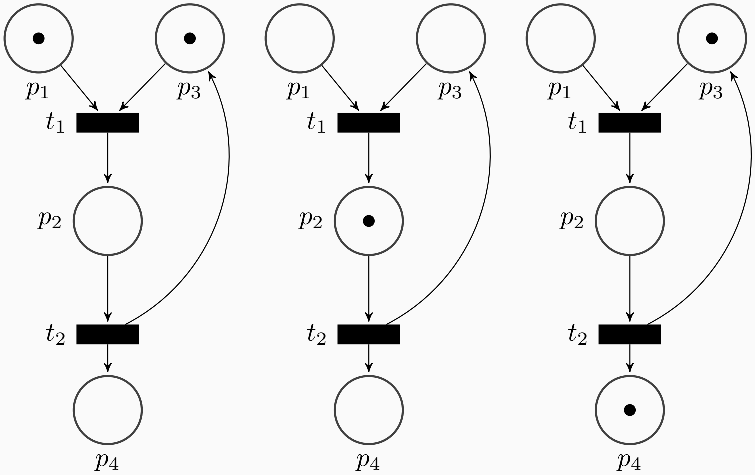
$$\vec{x}_{i-1} = \vec{x}_0 + (\sum_{t \in \langle t_1, \ldots, t_{i-1} \rangle} \vec{u}_t)\boldsymbol{\mathcal{A}}.$$

# Modellazione con reti di Petri

# Come modellare gli ingressi e le uscite di una rete di Petri

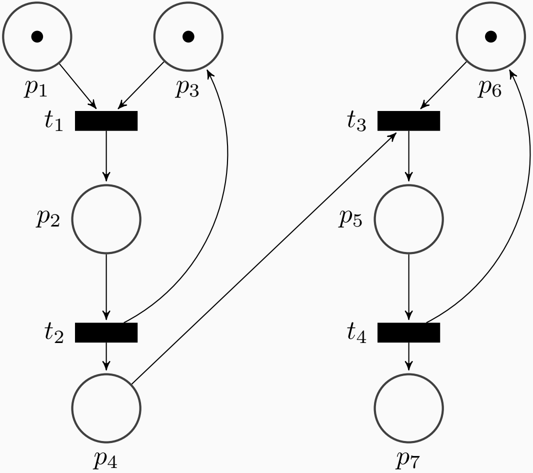


# Un servizio rappresentato da una rete di Petri



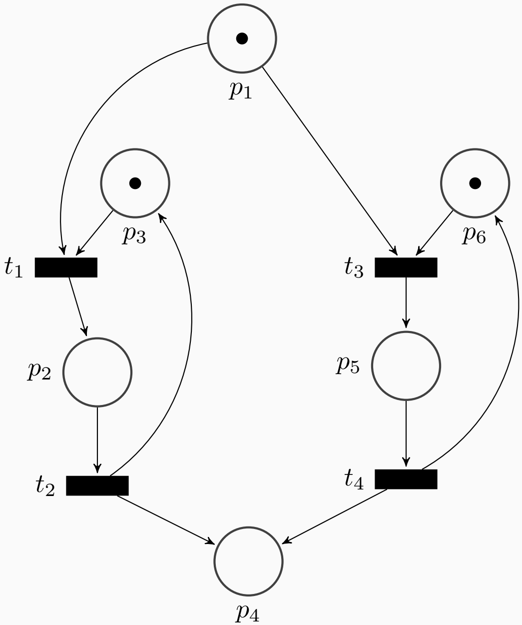

I clienti arrivano al posto $p_1$ e partono dal posto $p_4$.

# Composizione sequenziale di due servizi




I clienti arrivano al posto $p_1$ e partono dal posto $p_7$.

# Composizione parallela di due servizi




I clienti arrivano al posto $p_1$ e partono dal posto $p_6$.

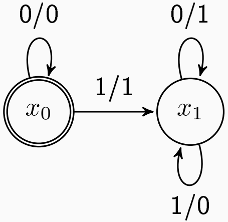
# Da una macchina a stati finiti a una rete di Petri

FSM $M = (\Sigma, \Delta, X, x_0, g, f)$ con gli insiemi $\Sigma$ e $\Delta$ disgiunti. Una rete di Petri equivalente è $N = (P, T, A, \vec{y}_0)$ con

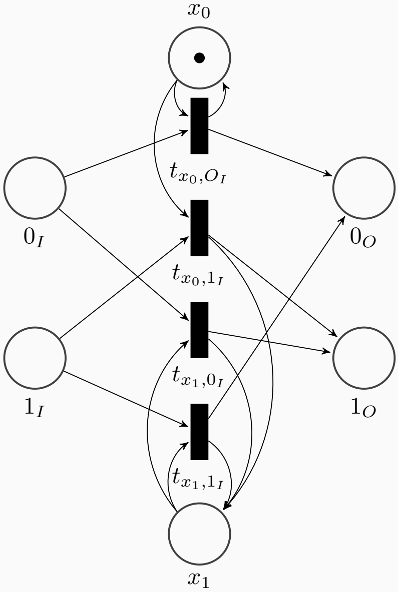
$$
\begin{aligned}
P &= X \cup \Sigma \cup \Delta \\
T &= \{t_{x,a} \mid x \in X, a \in \Sigma\} \\
A &= I(t_{x,a}) \cup O(t_{x,a}) \ \forall t_{x,a} \in T \\
I(t_{x,a}) &= \{x, a\} \\
O(t_{x,a}) &= \{g(x,a), f(x,a)\} \\
\vec{y}_0 &= [1, 0, \ldots, 0]
\end{aligned}
$$

- $\Sigma$ sono i posti in entrata;
- $\Delta$ sono i posti in uscita;
- $X$ sono i posti interni;
- Ogni coppia (stato, posto in entrata) in $M$ diventa una transizione in $N$;
- La marcatura iniziale rappresenta lo stato $x_0$ senza ingressi;

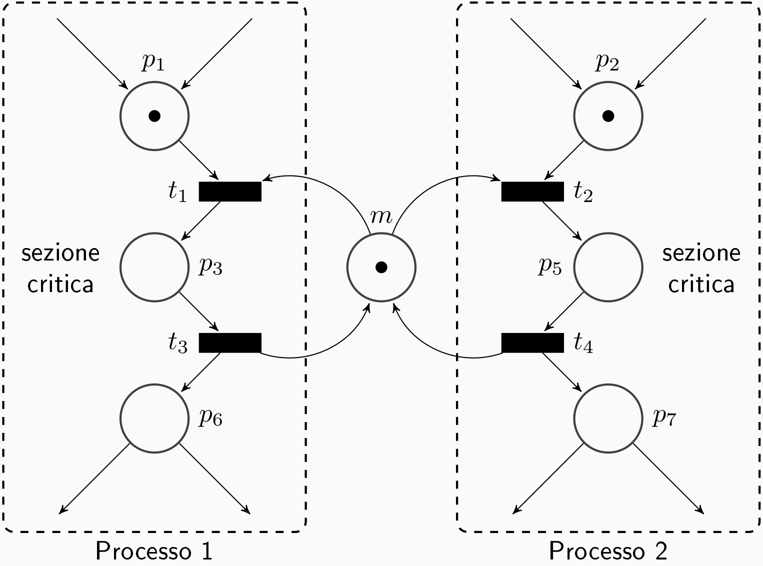
# FSM rappresentata come rete di Petri: esempio



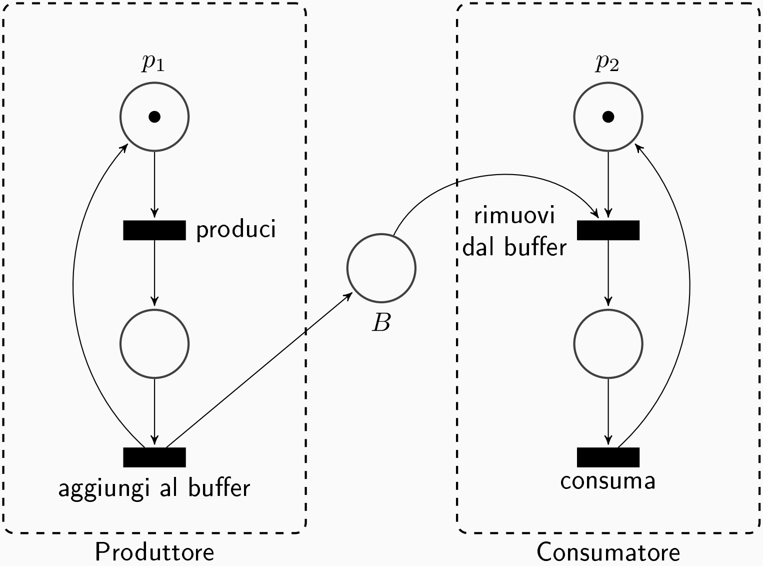

Calcolo del complemento a due di un numero binario letto dalla cifra meno significativa.



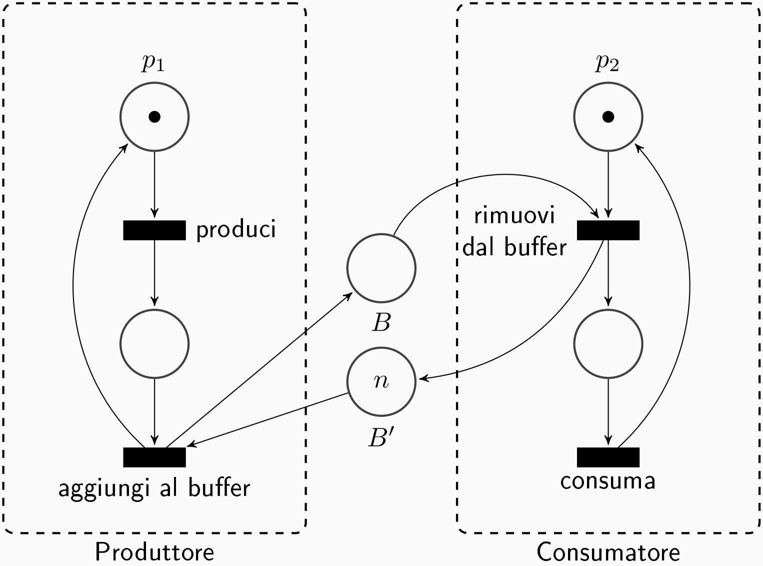
# Mutua esclusione rappresentata da una rete di Petri



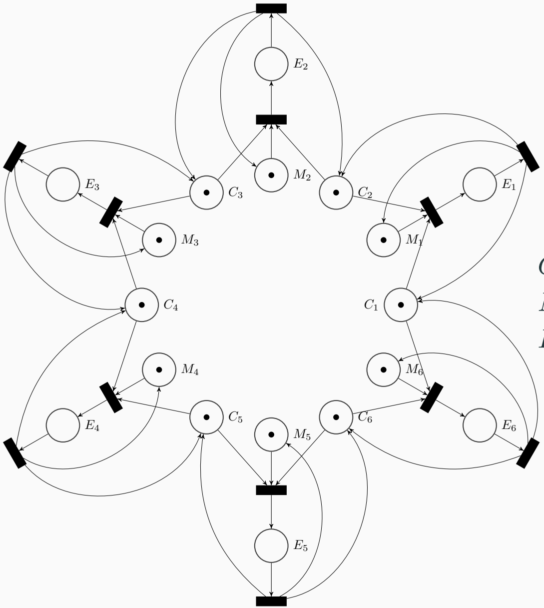
# Relazione produttore/consumatore



# Produttore/consumatore con un buffer limitato



# I filosofi a cena




$C_i$: Posate (bacchette)

$M_i$: Il filosofo $i$ sta meditando

$E_i$: Il filosofo $i$ sta mangiando

# Analisi di reti di Petri

# Metodi di analisi per le reti di Petri

- Limitatezza
- Conservatività
- Vivezza
- Persistenza
- Copertura
- Albero di copertura

# Limitatezza (boundedness)

Un posto $p \in P$ in una rete di Petri $N = (P, T, A, w, \vec{x}_0)$ è **k-limitato** o **k-sicuro** se per ogni

$$\vec{y} \in R(\vec{x}_0) : y(p) \leq k.$$

La rete di Petri è chiamata **k-limitata** o **k-sicura** se tutti i posti $p \in P$ sono k-limitati.

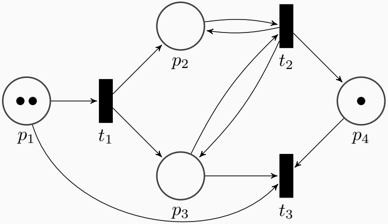
# Limitatezza (boundedness)

Un posto $p \in P$ in una rete di Petri $N = (P, T, A, w, \vec{x}_0)$ è **k-limitato** o **k-sicuro** se per ogni

$$\vec{y} \in R(\vec{x}_0) : y(p) \leq k.$$

La rete di Petri è chiamata **k-limitata** o **k-sicura** se tutti i posti $p \in P$ sono k-limitati.

Il posto $p_4$ non è limitato se si continua a far scattare $t_2$.



# Conservatività (conservation)

Una rete di Petri $N = (P, T, A, w, , \vec{x}_0)$ è **strettamente conservativa** se per tutti $\vec{y} \in R(\vec{x}_0)$

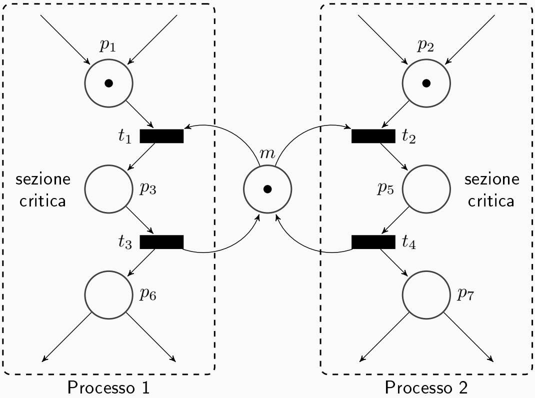
$$\sum_{p \in P} y(p) = \sum_{p \in P} x_0(p).$$

Una rete di Petri $N = (P, T, A, w, , \vec{x}_0)$ con $n$ posti è **conservativa rispetto ad un vettore pesato** $\vec{\gamma} = [\gamma_1, \gamma_2 \ldots, \gamma_n], \gamma_i \in \mathbb{N}$ se

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i x(p_i) = \text{ costante per ogni } \vec{x} \in R(\vec{x}_0).$$

Una rete di Petri è conservativa se è conservativa rispetto a un vettore pesato che ha un peso positivo non nullo per ogni posto.

# Conservatività: esempio di rete di Petri conservativa

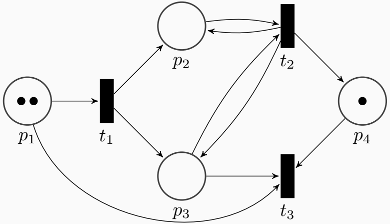


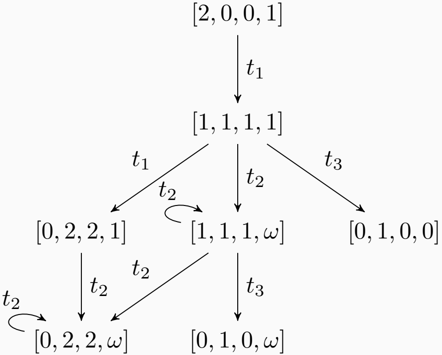

Conservativa rispetto a $[0,0,1,1,1,0,0]$ ($p_1$, $p_2$, $p_6$, $p_7$ non rilevanti rispetto alla risorsa stampanti in $m$).

Conservativa perchè conservativa rispetto a $\gamma = [1,1,2,1,2,1,1]$

$$\sum_i \gamma_i x(p_i) = 3.$$

# Conservatività: esempio di rete di Petri non conservativa




Verifica di conservatività:

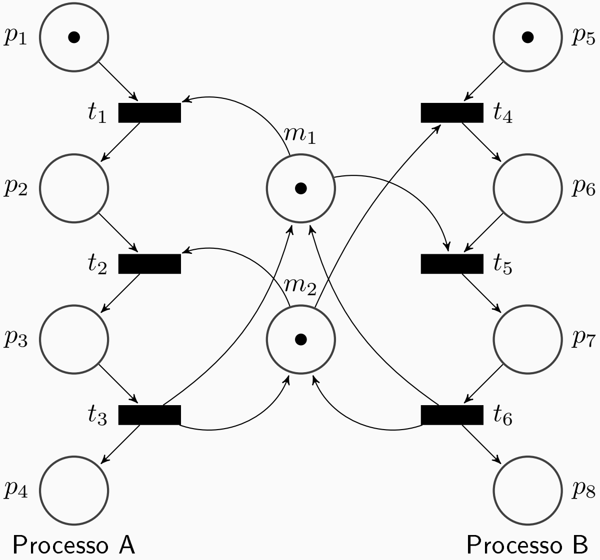
$$\begin{aligned} 2\gamma_i &= C \\ \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 &= C \\ 2\gamma_2+2\gamma_3 &= C \\ \gamma_2 &= C \end{aligned}$$

L'unica soluzione non negativa è $\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=C=0$.

$$\Downarrow$$

Il sistema non è conservativo rispetto ad alcun vettore positivo ($\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$, $\gamma_4$).

# Stallo (deadlock)



# Vitalità (liveness)

Sia $N = (P, T, A, w, \vec{x}_0)$ una rete di Petri e $\vec{x}$ uno stato raggiungibile da $\vec{x}_0$.

**L0-viva:** Una transizione $t$ è **viva al livello 0** nello stato $\vec{x}$ se non può scattare in nessun stato raggiungibile da $\vec{x}$, cioè si ha uno stallo.

**L1-viva:** Una transizione $t$ è **viva al livello 1** nello stato $\vec{x}$ se potenzialmente può scattare, cioè se esiste una $\vec{y} \in R(\vec{x})$ tale che $t$ sia abilitato in $\vec{y}$.

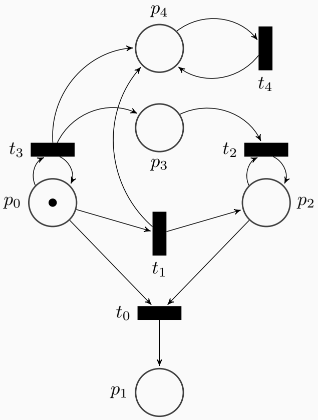
**L2-viva:** Una transizione $t$ è **viva al livello 2** nello stato $\vec{x}$ se per ogni intero $n$ esiste una sequenza di scatto in cui $t$ compare almeno $n$ volte.

**L3-viva:** Una transzione $t$ è **viva al livello 3** nello stato $\vec{x}$ se esiste una sequenza infinita di scatti in cui $t$ compare infinitamente spesso.

**L4-viva:** Una transizione $t$ è **viva al livello 4** nello stato $\vec{x}$ se è L1-viva per ogni $\vec{x} \in R(\vec{x})$.

Una rete di Petri è viva al livello $i$ se ogni transizione è viva al livello $i$.

# Vitalità: esempio




- $t_0$ è morta: non può mai scattare;
- $t_1$ è L1-viva: può scattare una sola volta perchè rimuove il gettone da $p_0$ che non può essere rimpiazzato;
- $t_2$ è L2-viva: per ogni $n$ c'è una sequenza di transizioni tali che $t_2$ scatta $n$ volte, ad esempio $t_3^n t_1 t_2^n$ ma $t_2$ non è L3-viva perchè non c'è nessuna sequenza tale che $t_2$ scatti un numero infinito di volte: affinchè $t_2$ scatti, prima deve scattare $t_1$, ma poi $t_2$ può scattare solo un numero finito di volte;
- $t_3$ è L3-viva: può scattare un numero infinito di volte, ma non per una sequenza arbitraria, in particolare $t_3$ non può scattare se prima scatta $t_1$;
- $t_4$ è L4-viva.: L1-viva in ogni stato per ogni sequenza.

# Persistenza (persistence)

Due transizioni sono **persistenti una rispetto all'altra** se, nel mmomento in cui entrambe vengono attivate lo scattto di una non dsabilita l'altra.

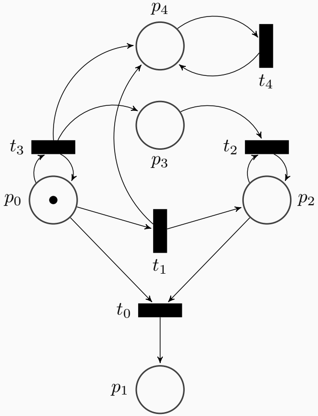
Una rete di Petri è **persistente** se ogni coppia di transizioni è persistente.

# Persistenza (persistence)

Due transizioni sono **persistenti una rispetto all'altra** se, nel mmomento in cui entrambe vengono attivate lo scattto di una non dsabilita l'altra.

Una rete di Petri è **persistente** se ogni coppia di transizioni è persistente.

Rete di Petri non persistente perchè se sia $t_1$ che $t_3$ sono abilitate lo scatto di $t_1$ disabiliterà $t_3$, ma $t_2$ e $t_3$ sono persistenti reciprocamente.



# Copertura (coverability)

Sia $N = (P, T, A, w, \vec{x}_0)$ una rete di Petri e siano $\vec{x}$ e $\vec{y}$ stati arbitrari.

Lo stato $\vec{x}$ **ricopre** lo stato $\vec{y}$ se tutte le transizioni abilitate in $\vec{y}$ sono abilitate anche in $\vec{x}$:

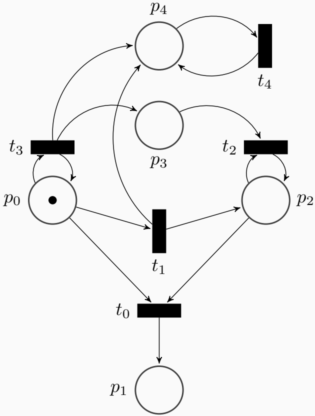
$$x(p) \geq y(p) \; \forall p \in P.$$

Lo stato $\vec{x}$ **ricopre strettamente** lo stato $\vec{y}$ se $\vec{x}$ copre $\vec{y}$ e, in aggiunta,

$$\exists p \in P : x(p) > y(p).$$

Sia $\vec{x} \in R(\vec{x}_0)$. Uno stato $\vec{y}$ è **ricopribile da** $\vec{x}$ se e solo se esiste uno stato $\vec{x}' \in R(\vec{x})$ tale che $x'(p) \geq y(p)$ per ogni $p \in P$.

# Copertura: esempio




- $t_0$ è morta? Equivale a $y_0 = [1, 0, 1, 0, 0]$ è ricopribile da $x_0$? No.
- $t_2$ è L2-viva? Equivale a $y_1 = [0, 0, 1, 1, 0]$ è ricopribile da $x_0$? Si.

# Albero di copertura: definizione

Sia $N = (P, T, A, w, \vec{x}_0)$ una rete di Petri.

Un albero di copertura è un albero in cui gli archi denotano transizioni $t \in T$ e i nodi rappresentano stati $\omega$-estesi della rete di Petri.

Il **nodo radice** dell'albero è $\vec{x}_0$.

Un **nodo terminale** è uno stato $\omega$-esteso in cui nessuna transizione è attiva.

Un **nodo duplicato** è uno stato $\omega$-esteso che esiste già da qualche parte nell'albero di copertura.

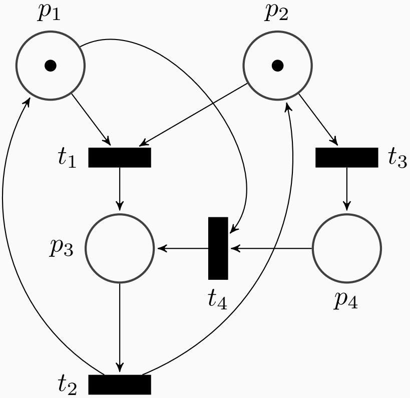
Un **arco** $t$ connette due nodi $\vec{x}$ e $\vec{y}$ nell'albero, se e solo se facendo scattare $t$ dallo stato $\vec{x}$ si raggiunge lo stato $\vec{y}$.

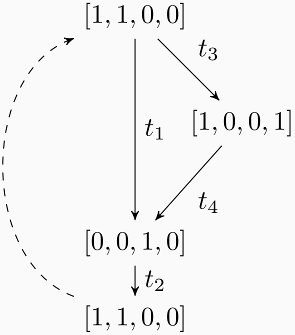
# Albero di copertura: algoritmo (Karp-Miller, 1969)

1. Il nodo radice è lo stato iniziale $\vec{x}_0$ non visitato.
2. Si consideri un nodo $\vec{x}$ dell'albero non visitato.
   2.1 Per ogni transizione $t$ abilitata in $\vec{x}$:
      2.1.1 Si calcoli $\vec{x}' = G(\vec{x}, t)$, lo stato raggiunto da $\vec{x}$ facendo scattare $t$.
      2.1.2 Si consideri il cammino dalla radice a $\vec{x}$.
      Se esiste su questo cammino un nodo $\vec{\tilde{x}} < \vec{x}'$ allora sia $\vec{\hat{x}}'$ lo stato $\omega$-esteso ottenuto da $\vec{x}'$ sostituendo con $\omega$ le componenti di $\vec{x}'$ strettamente maggiorate da quelle di $\vec{\tilde{x}}$.
      Se non esiste su questo cammino un nodo $\vec{\tilde{x}} < \vec{x}'$ allora sia $\vec{\hat{x}}' = \vec{x}'$.
      2.1.3 Si aggiunga all'albero un nuovo nodo $\vec{\hat{x}}'$.
      2.1.4 Si aggiunga un arco $t$ tra il nodo $\vec{x}$ e il nuovo nodo $\vec{\hat{x}}'$.
      2.1.5 Se esiste nell'albero un nodo $\vec{\hat{x}}'$, si etichetti il nuovo nodo $\vec{\hat{x}}'$ come duplicato e visitato.

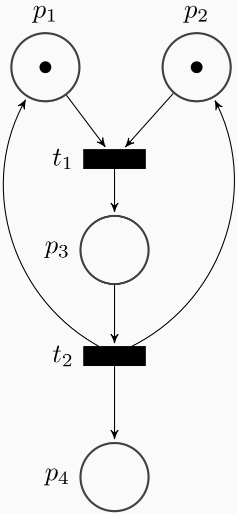
   2.2 Si etichetti il nodo $\vec{x}$ come visitato.
3. Se esistono nodi non visitati si ritorni a 2.

# Albero di copertura per un insieme di stati finito



## Albero di copertura per un insieme di stati infinito



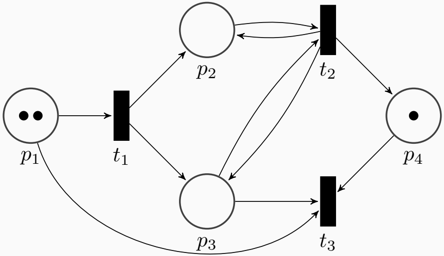

$$[1,1,0,0] \xrightarrow{t_1} [0,0,1,0] \xrightarrow{t_2} [1,1,0,1] \xrightarrow{t_1} [0,0,1,1] \xrightarrow{t_2} [1,1,0,2] \xrightarrow{t_1} [0,0,1,2] \xrightarrow{t_2} \dots$$

$$\Rightarrow$$

$$[1,1,0,0] \xrightarrow{t_1} [0,0,1,0] \xrightarrow{t_2} [1,1,0,\omega] \xrightarrow{t_1} [0,0,1,\omega] \xrightarrow{t_2} [1,1,0,\omega]$$

ripetizione

# Albero di copertura: esempio

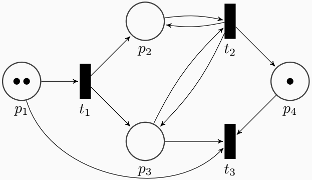


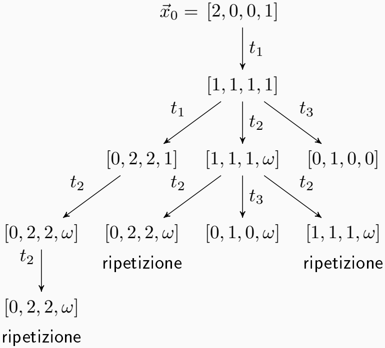

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \vec{x}_0 = [2,0,0,1] \arrow[d, "t_1"] & \\
 & & {[1,1,1,1]} \arrow[dl, "t_1"'] \arrow[d, "t_2"] \arrow[dr, "t_3"] & \\
 & {[0,2,2,1]} \arrow[dl, "t_2"'] & {[1,1,1,\omega]} \arrow[dl, "t_2"'] \arrow[d, "t_3"] \arrow[dr, "t_2"] & {[0,1,0,0]} \\
{[0,2,2,\omega]} \arrow[d, "t_2"'] & {[0,2,2,\omega]} & {[0,1,0,\omega]} & {[1,1,1,\omega]} \\
{[0,2,2,\omega]} & \text{ripetizione} & & \text{ripetizione} \\
\text{ripetizione} & & &
\end{tikzcd}
$$

N.B.: Trattandosi di un albero ogni nodo può avere un solo arco entrante.

# Albero di copertura: limitatezza

- Una rete di Petri può essere $k$-limitata se il simbolo $\omega$ non appare mai nell'albero di copertura.
- Se l'albero di copertura contiene un $\omega$, può essere identificato un ciclo di transizioni che supera un qualsiasi $k$.
- L'albero di copertura non fornisce il numero di cicli richiesti.

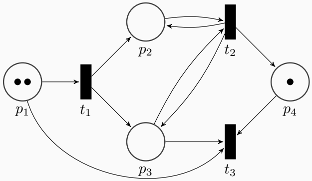


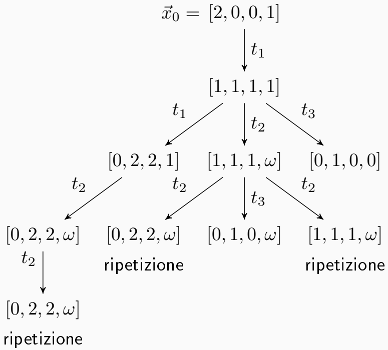




La rete di Petri non è limitata data la presenza di $\omega$.

# Albero di copertura: conservatività

- Richiamo: $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i x(p_i) =$ costante per ogni $\vec{x} \in R(\vec{x}_0)$.
- Se c'è un $\omega$ il corrispondente $\gamma_i$ deve essere 0.
- Valutiamo la somma pesata di ciascun nodo nell'albero di copertura. La rete è conservativa se e solo se il risultato è il medesimo per tutti i nodi.

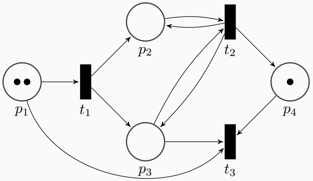


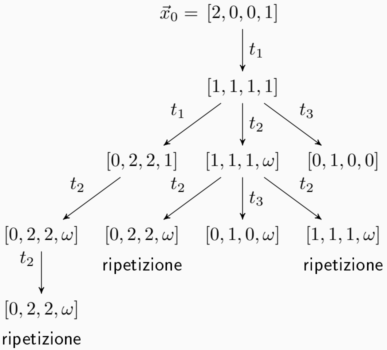




La rete di Petri è conservativa per $\vec{\gamma} = [2,3,,1,0]$?

# Albero di copertura: conservatività

- Richiamo: $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i x(p_i) =$ costante per ogni $\vec{x} \in R(\vec{x}_0)$.
- Se c'è un $\omega$ il corrispondente $\gamma_i$ deve essere 0.
- Valutiamo la somma pesata di ciascun nodo nell'albero di copertura. La rete è conservativa se e solo se il risultato è il medesimo per tutti i nodi.




La rete di Petri è conservativa per $\vec{\gamma} = [2,3,,1,0]$? No.

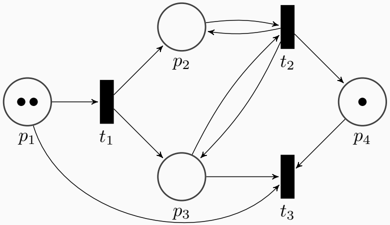
# Calcolo del vettore di conservazione

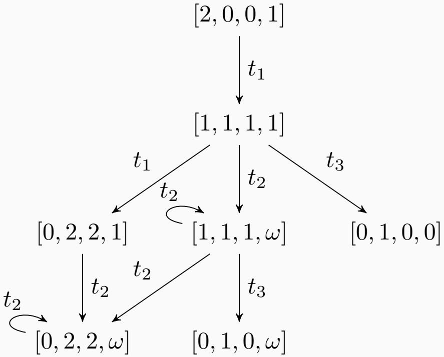
- Assegniamo $\gamma_i = 0$ per ogni posto non limitato $p_i$.
- Per i $b$ posti limitati ed $r$ nodi dell'albero di copertura impostiamo $r$ equazioni con $b + 1$ variabili incognite

$$\sum_{i=1}^{b} \gamma_i x(p_i) = C.$$

- Risolviamo il sistema lineare risultante.

# Conservatività: esempio di rete di Petri non conservativa




Verifica di conservatività:

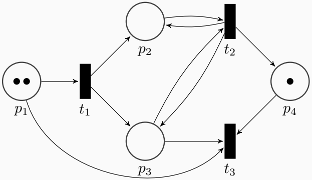
$$\begin{aligned} 2\gamma_i &= C \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 &= C \\ 2\gamma_2 + 2\gamma_3 &= C \\ \gamma_2 &= C \end{aligned}$$

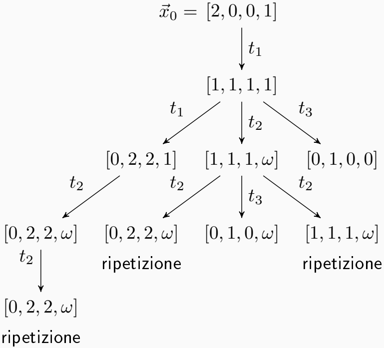
L'unica soluzione non negativa è $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = C = 0$.

$$\Downarrow$$

Il sistema non è conservativo rispetto ad alcun vettore positivo ($\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$, $\gamma_4$).

# Calcolo del vettore di conservazione: esempio



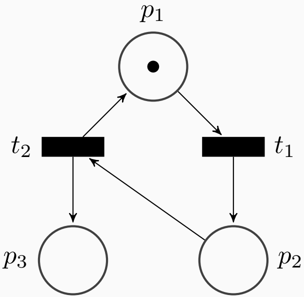

$$
\begin{aligned}
\gamma_4 &= 0\\
2\gamma_1 + 0\gamma_2 + 0\gamma_3 &= C\\
1\gamma_1 + 1\gamma_2 + 1\gamma_3 &= C\\
0\gamma_1 + 2\gamma_2 + 2\gamma_3 &= C\\
0\gamma_1 + 1\gamma_2 + 0\gamma_3 &= C
\end{aligned}
$$

L'unica soluzione non negativa è $\vec{\gamma} = [0,0,0,0]$ e $C = 0$.

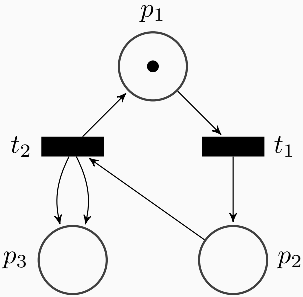
# Albero di copertura: copertura e raggiungibilità

- Il problema della copertura può essere risolto ispezionando l'albero di copertura.
- La sequenza di transizioni più corta che porta alla copertura di uno stato può essere trovata con efficienza.
- L'albero di copertura definisce una condizione necessaria ma non sufficiente per riolvere il problema della raggiungibilità.
- Il problema della raggiungibilità è semi-decidibile in modo elementare, e decidibile con una procedura complessa (e inefficiente).

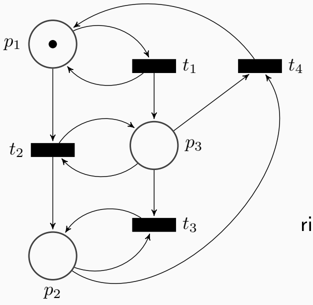
# Reti di Petri distinte con il medesimo albero di copertura 1



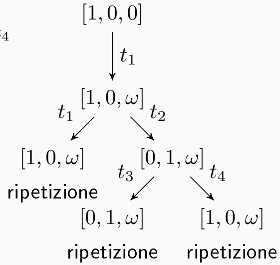

$$
\begin{array}{c}
[1,0,0] \\
\downarrow t_1 \\
[0,1,0] \\
\downarrow t_2 \\
[1,0,\omega] \\
\downarrow t_1 \\
[0,1,\omega] \\
\downarrow t_2 \\
[1,0,\omega]
\end{array}
$$

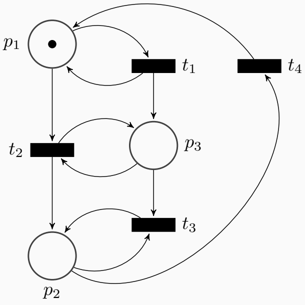


# Reti di Petri distinte con il medesimo albero di copertura 2




$PN_1$




$PN_2$

La rete di Petri $PN_1$ può andare in stallo con la sequenza $t_1$, $t_2$, $t_3$, mentre la rete di Petri $PN_2$ non può andare in stallo potendo continuare la sequenza con $t_4$ e tornando alla situazione di partenza.

# Riepilogo

- Dinamica delle reti di Petri
- L'insieme di raggiungibilità
- Schemi dei modelli
  - Composizione
  - Fork/Join
  - Conflitto
  - Mutua esclusione
  - Produttore/consumatore
- Problemi di analisi
  - Limitatezza
  - Conservatività
  - Vitalità
  - Persistenza
  - Stallo
  - Copertura
- Albero di copertura ed analisi con esso

# Bibliografia


- A. Jantsch, Modeling Embedded Systems and SoC's: Concurrency and Time in Models of Computation. Elsevier, 2003.
- A. Di Febbraro, A. Giua, Sistemi a Eventi Discreti, McGraw-Hill, 2002.