Foglio 3

Da consegnare Giovedi 30 ottobre all'inizio della lezione.

Esercizio 1 (Punti 6)**.** Al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$ discutere l'invertibilità della matrice

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -2\alpha & -3 \\ 0 & \alpha & -1 \\ 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

Per tali α determinare l'inversa di A_α.

Esercizio 2 (Punti 6)**.** Si consideri il seguente sottoinsieme di $M_2(\mathbb{C})$:

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} |a, b, c \in \mathbb{C},\ b + c = 0 \right\}$$

dotato dell'usuale somma tra matrici e moltiplicazione per elementi di $\mathbb{C}$. Verificare che W è uno spazio vettoriale e trovarne una base.

Esercizio 3 (Punti 6)**.** Si consideri l'insieme di vettori in $\mathbb{C}^4$

$$W = \left\{ [0\ \ 1\ \ 0\ \ 1]^T, [-1\ \ 4\ \ 3\ \ 2]^T, [-3\ \ 7\ \ 9\ \ 1]^T, [-1\ \ 2\ \ 3\ \ 0]^T \right\}$$

1. Dimostrare che è linearmente dipendente.
2. Estrarre da essi un insieme linearmente indipendente e completarlo ad una base di $\mathbb{C}^4$.

Esercizio 4 (Punti 6)**.** Verificare che il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$

$$W = \left\{ [x_1\ \ x_2\ \ x_3]^T \in \mathbb{R}^3 | \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases} \right\}$$

dotato dell'usuale somma e moltiplicazione per elementi di $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale. $v = [-3\quad -3\ \ 2]^T$ sta in W? (Giustificare la risposta).

Esercizio 5 (Punti 6)**.** Si consideri l'insieme $V := \mathbb{R}_{\geq} \setminus \{0\}$ dotato dell'operazione

$$\begin{aligned} \star : \quad V \times V &\longrightarrow \quad V \\ (v, w) &\longmapsto \quad v \cdot w \end{aligned}$$

in cui $\cdot$ denota l'usuale prodotto di $\mathbb{R}$; e dell'operazione

$$\begin{aligned} \diamond : \quad \mathbb{R} \times V &\longrightarrow \quad V \\ (\alpha, v) &\longmapsto \quad v^\alpha \end{aligned}$$

Dimostrare che V dotato delle operazioni $\star$ e $\diamond$ ha la struttura di $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. Ha dimensione finita?