Esercitazione IV: calcolo dei predittori.

Il modelli arx in esame appartengono alla seguente famiglia

$$y(k) + a_1\, y(k-1) + a_2\, y(k-2) = b_1 u(k-1) + b_2 u(k-1) + e(k)$$

In cui viene posto a zero a_2 o b_2. Introducendo l'operatore di ritardo q si ricava che

$$[1 + a_1 q^{-1} + a_2\, q^{-2}]y(k) = [b_1 q^{-1} + b_2\, q^{-2}]u(k) + e(k)$$

Da cui

$$y(k) = G(q)u(k) + H(q)e(k)$$

dove

$$H(q) = \frac{1}{A(q)} \qquad G(q) = \frac{B(q)}{A(q)}$$

Da cui il predittore risulta essere

$$\hat{y}(k|k-1) = H^{-1}(q)G(q)u(k) + [1 - H^{-1}(q)]y(k) = A(q)\frac{B(q)}{A(q)}u(k) + [1 - A(q)]y(k) =$$
$$= b_1 q^{-1}u(k) + \ b_2 q^{-1}u(k) - a_1 q^{-1}y(k) - a_2\, q^{-2}\, y(k)$$
$$= b_1 u(k-1) + \ b_2 u(k-2) - a_1 y(k-1) - a_2\, y(k-2)$$

A titolo di confronto si riporta il calcolo del predittore ottimo per il modello vero

$$y(k) = a^*\, y(k-1) + \ b^*\, u(k-1) + e(k) + c^*\, e(k-1)$$

Che rientra nella famiglia generale introducendo i polinomi $A(q) = 1 - a^* q^{-1},\ B(q) = b^* q^{-1}$ e $C(q) = 1 + c^* q^{-1}$. Pertanto il modello vero risulta essere:

$$y(k) = G(q)u(k) + H(q)e(k)$$

dove

$$H(q) = \frac{C(q)}{A(q)} \qquad G(q) = \frac{B(q)}{A(q)}$$

Al modello descritto corrisponde il seguente predittore ottimo

$$\hat{y}^*(k|k-1) = H^{-1}(q)G(q)u(k) + [1 - H^{-1}(q)]y(k) = \frac{A(q)B(q)}{C(q)A(q)}u(k) + \left[1 - \frac{A(q)}{C(q)}\right]y(k)$$

Da cui

$$C(q)\hat{y}^*(k|k-1) = B(q)u(k) + \big(C(q) - A(q)\big)y(k)$$
$$\hat{y}^*(k|k-1) - c^*\hat{y}^*(k-1|k-2) = b^* u(k-1) + (a^* + c^*)y(k-1)$$
$$\hat{y}^*(k|k-1) = b^* u(k-1) + (a^* + c^*)y(k-1) + c^*\hat{y}^*(k-1|k-2)$$

Nell'equazione precedente risulta ovvia la non linearità nei parametri (infatti la predizione passate rientra nella predizione futura), pertanto una parte dell'errore non dovrebbe essere spiegabile.