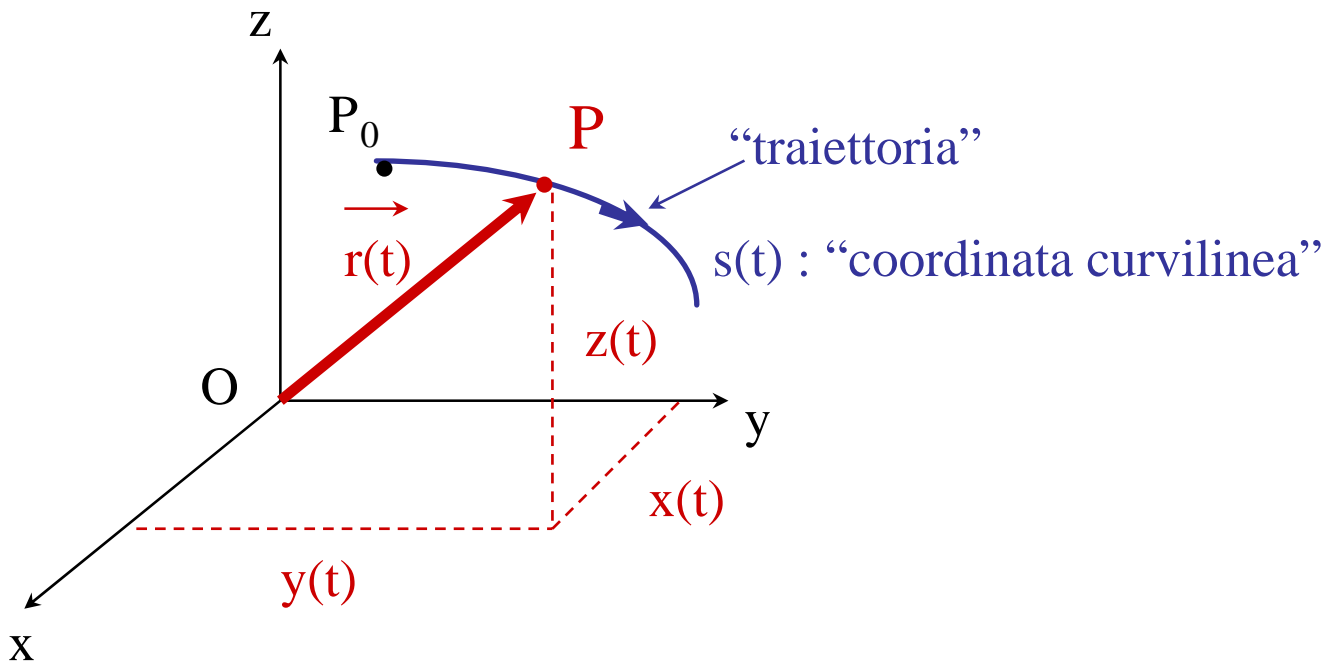


Moto curvilineo nello spazio tridimensionale

Moto di un “punto materiale” P nel sistema $Oxyz$

Legge del moto descritta dal vettore: $\vec{OP}(t) \equiv \vec{r}(t) \equiv (x(t), y(t), z(t))$



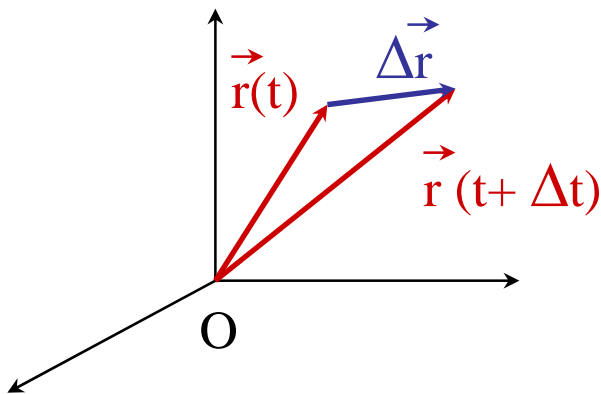
$$\left\{ \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array} \right. \Rightarrow \text{“equazioni parametriche” della traiettoria} \\ \text{nel parametro } t \text{ (tempo)}$$

Eliminando il tempo, ad es. invertendo la funzione $x(t) : t = t(x)$

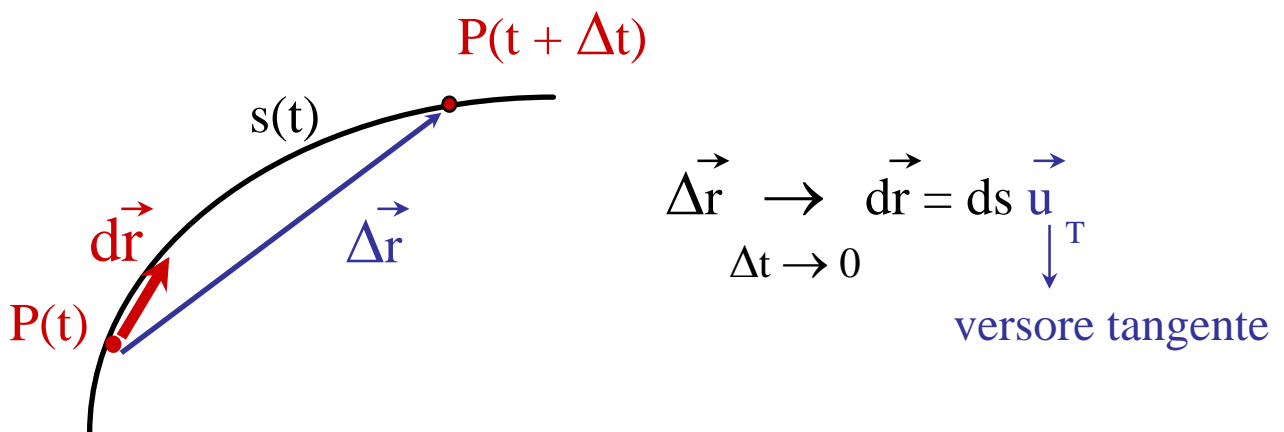
$$\Rightarrow \begin{array}{l} y = y [t(x)] = f_y(x) \\ z = z [t(x)] = f_z(x) \end{array} \Rightarrow \text{“equazioni della} \\ \text{traiettoria”}$$

Vettore velocità istantanea:

$$\vec{v}(t) \equiv \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$



La velocità istantanea é un **vettore tangente** alla traiettoria :



$$\vec{v}(t) \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \vec{u}_T = v(t) \vec{u}_T$$

↓
velocità scalare

- Componenti cartesiane del vettore velocità:

$$\vec{v} \equiv (v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt} \right)$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \vec{v} &\equiv \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \equiv \frac{d(x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z)}{dt} = \\ &= \frac{dx(t)}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy(t)}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz(t)}{dt}\vec{u}_z = \\ &= v_x(t)\vec{u}_x + v_y(t)\vec{u}_y + v_z(t)\vec{u}_z \end{aligned}$$

- Problema inverso: da $\mathbf{v}(t)$ a $\mathbf{r}(t)$

Se è nota la funzione (vettoriale) velocità, la **legge del moto $\mathbf{r}(t)$** si ottiene per integrazione :

$$d\vec{r} = \vec{v}(t)dt \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{r} \equiv \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \int d\vec{r} = \int_{t_0}^t \vec{v}(t')dt'$$

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v_x(t')dt'$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{v}(t')dt' \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t v_y(t')dt'$$

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t v_z(t')dt'$$

Vettore accelerazione istantanea:

$$\vec{a}(t) \equiv \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

- Componenti cartesiane dell'accelerazione:

$$\vec{a} \equiv (a_x, a_y, a_z) = \left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}, \frac{d^2y(t)}{dt^2}, \frac{d^2z(t)}{dt^2} \right)$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \vec{a} &\equiv \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \equiv \frac{d(v_x(t)\vec{u}_x + v_y(t)\vec{u}_y + v_z(t)\vec{u}_z)}{dt} = \\ &= \frac{dv_x(t)}{dt}\vec{u}_x + \frac{dv_y(t)}{dt}\vec{u}_y + \frac{dv_z(t)}{dt}\vec{u}_z = \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)\vec{u}_x + \frac{d}{dt}\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)\vec{u}_y + \frac{d}{dt}\left(\frac{dz(t)}{dt}\right)\vec{u}_z = \\ &= \frac{d^2x(t)}{dt^2}\vec{u}_x + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\vec{u}_y + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\vec{u}_z = \\ &= a_x(t)\vec{u}_x + a_y(t)\vec{u}_y + a_z(t)\vec{u}_z \end{aligned}$$

- Problema inverso: da $\mathbf{a}(t)$ a $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{r}(t)$.

Dall'accelerazione $\mathbf{a}(t)$ alla velocità $\mathbf{v}(t)$:

Invertendo la relazione che definisce l'accelerazione e integrando in funzione del tempo :

$$d\vec{v} = \vec{a}(t)dt \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\vec{v} \equiv \vec{v}(t) - \vec{v}(t_0) = \int d\vec{v} = \int_{t_0}^t \vec{a}(t')dt'$$

$$v_x(t) = v_x(t_0) + \int_{t_0}^t a_x(t')dt'$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{a}(t')dt'$$

$$\Leftrightarrow v_y(t) = v_y(t_0) + \int_{t_0}^t a_y(t')dt'$$

$$v_z(t) = v_z(t_0) + \int_{t_0}^t a_z(t')dt'$$

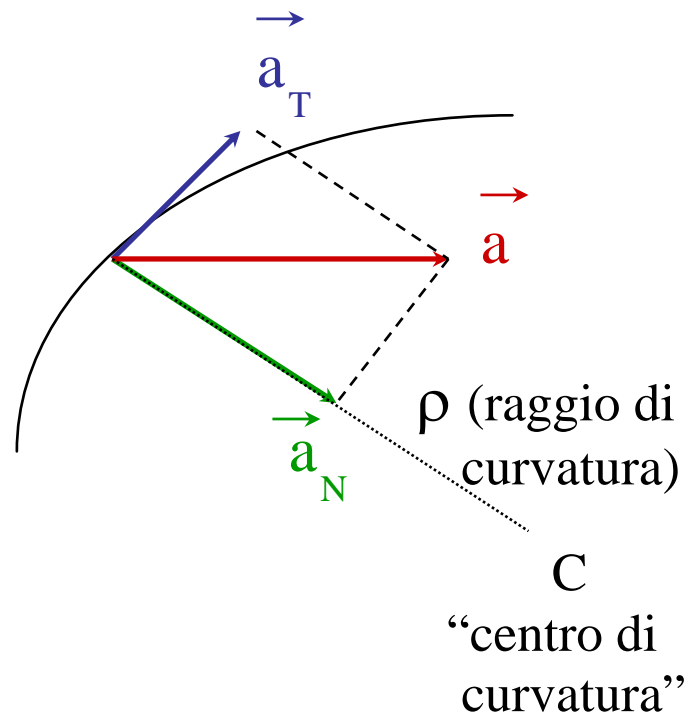
Dalla velocità $\mathbf{v}(t)$ alla legge oraria del moto $\mathbf{r}(t)$

Una volta nota la la funzione vettoriale velocità istantanea, la legge oraria del moto $\mathbf{r}(t)$ si ottiene per integrazione di $\mathbf{v}(t)$ in funzione del tempo (vedi due diapositive più sopra)

Vettore **accelerazione: componenti intrinseche**

L'accelerazione ha una **componente tangente** ed una **componente normale** alla traiettoria :

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &\equiv \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d[v(t)\vec{u}_T(t)]}{dt} = \\ &= \frac{dv(t)}{dt}\vec{u}_T + v(t)\frac{d\vec{u}_T(t)}{dt} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\frac{v(t)}{\rho}\vec{u}_N}\end{aligned}$$

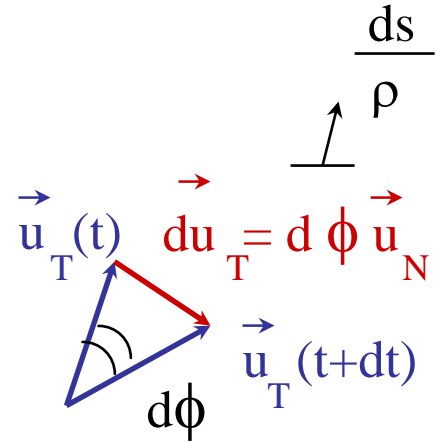
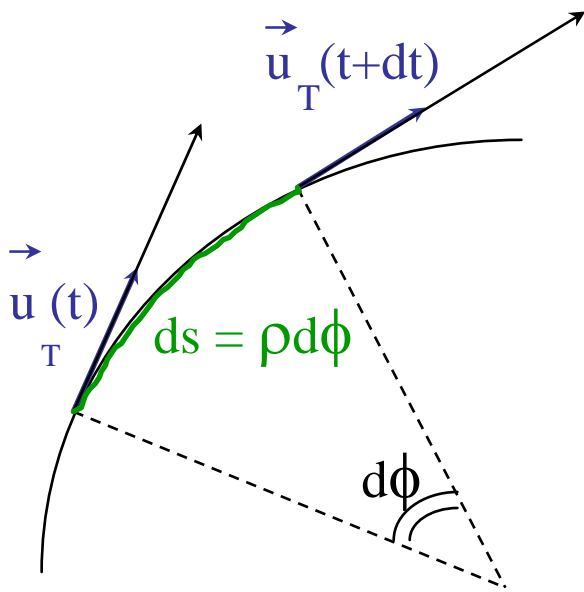


$$\vec{a} = a_T \vec{u}_T + a_N \vec{u}_N$$

accelerazione tangente : $a_T(t) = \frac{dv(t)}{dt}$

accelerazione normale : $a_N(t) = \frac{v^2(t)}{\rho(t)}$

Accelerazione normale:



$$d(\vec{u}_T^2) = 2\vec{u}_T \cdot d\vec{u}_T = 0 \quad \Rightarrow \quad d\vec{u}_T \perp \vec{u}_T$$

\Rightarrow

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \vec{u}_N = \frac{1}{\rho} \frac{ds}{dt} \vec{u}_N = \frac{v(t)}{\rho} \vec{u}_N$$

Moto circolare uniforme:

coordinata curvilinea

velocità con modulo costante:

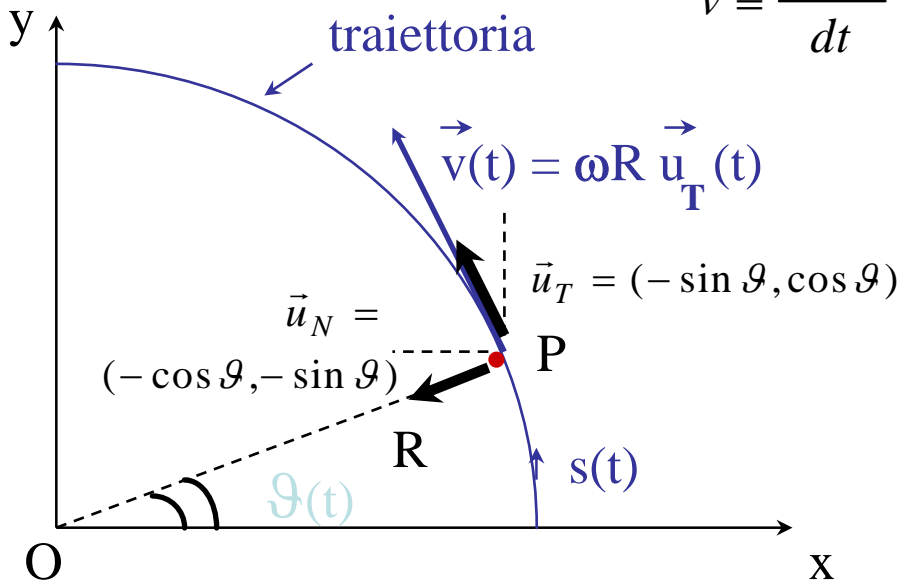
$$s(t) = R\vartheta(t)$$

$$v \equiv \frac{ds(t)}{dt} = R \frac{d\vartheta(t)}{dt} = \omega R$$

“velocità angolare”

$$\omega \equiv \frac{d\vartheta(t)}{dt}$$

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 + \omega t$$



$$\begin{aligned} x(t) &= R \cos \vartheta(t) & \Rightarrow & \quad v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -R \sin \vartheta(t) \frac{d\vartheta}{dt} \equiv -R\omega \sin \vartheta(t) \\ y(t) &= R \sin \vartheta(t) & \Rightarrow & \quad v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = R \cos \vartheta(t) \frac{d\vartheta}{dt} \equiv R\omega \cos \vartheta(t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t)) = R\omega(-\sin \vartheta(t), \cos \vartheta(t))$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}(t) = R\omega \vec{u}_T(t) = v \vec{u}_T(t)}$$

\vec{u}_T

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = -R\omega \cos \vartheta(t) \frac{d\vartheta}{dt} = -R\omega^2 \cos \vartheta(t)$$

$$a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = -R\omega \sin \vartheta(t) \frac{d\vartheta}{dt} = -R\omega^2 \sin \vartheta(t)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}(t) = (a_x(t), a_y(t)) = R\omega^2(-\cos \vartheta(t), -\sin \vartheta(t))$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}(t) = R\omega^2 \vec{u}_N(t) = \frac{v^2}{R} \vec{u}_N(t)}$$

\vec{u}_N