Prof. Francesca Mantese
Università di Verona, 2018/2019
Corso di Laurea in Matematica Applicata

# Esercizi per il Corso di

## ALGEBRA LINEARE ED ELEMENTI DI GEOMETRIA

**Foglio 7**
24 Dicembre 2018

1. Sia $V$ uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{C}$ di dimensione $3$ con base $\{v_1, v_2, v_3\}$. Si consideri la base canonica di $\mathbb{C}^3$ $\{e_1, e_2, e_3\}$ e sia $f : V \to \mathbb{C}^3$ l'unica applicazione lineare tale che $f(v_i) = e_i$ per $i = 1, 2, 3$.
   (a) Si provi che $f$ è un isomorfismo
   (b) Si provi in maniera analoga che ogni spazio vettoriale $V$ di dimensione $n$ su $\mathbb{C}$ è isomorfo a $\mathbb{C}^n$ (isomorfo significa che esiste un isomorfismo tra i due spazi).
   (c) Si dimostri che due spazi vettoriali su $\mathbb{C}$ della stessa dimensione sono tra loro isomorfi.

   *(6 punti)*

2. (a) Esiste una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(0,1)^T = (2,4)^T$ e $f(0,2)^T = (1,3)^T$? È unica?
   (b) Esiste una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(0,1)^T = (2,4)^T$ e $f(1,1)^T = (1,5)^T$? È unica? In caso affermativo trovare il nucleo e l'immagine di $f$ (Sugg: Si noti che $\{(0,1)^T, (1,1)^T\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$)
   (c) Esiste una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(0,1,1)^T = (2,4)^T$ e $f(1,0,1)^T = (1,5)^T$? È unica?

   *(6 punti)*

3. Si consideri il sistema lineare $Ax = b$, dove $A$ è una matrice in $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ e $b \in \mathbb{C}^m$. Sia $N(A)$ lo spazio nullo di $A$ e sia $v$ una soluzione del sistema lineare $Ax = b$.
   (a) Si dimostri che per ogni $u \in N(A)$, $u + v$ è una soluzione di $Ax = b$.
   (b) Si dimostri che se $w$ è una soluzione di $Ax = b$, allora $w - v \in N(A)$.
   (c) Si concludi che l'insieme delle soluzioni del sistema $Ax = b$ è l'insieme $\{v + u \mid u \in N(A)\}$.
   (d) L'insieme delle soluzioni di $Ax = b$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^n$?

   *(6 punti)*

4. Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - \alpha x_4 = 8 \end{cases}$$

   (a) si scriva il sistema nella forma matriciale $A_\alpha x = b_\alpha$ e si trovi lo spazio nullo $N(A_\alpha)$.
   (b) si verifichi che $v = (\ 3-\alpha,\ 0, 2+\alpha,\ -1)^T$ è una soluzione del sistema $A_\alpha x = b_\alpha$
   (c) Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si trovino tutte le soluzioni del sistema $A_\alpha x = b_\alpha$
   (d) Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si trovino le soluzioni del sistema $A_\alpha x = c_\alpha$, dove $c_\alpha = A_\alpha(2-i,\ \alpha^3,\ \sqrt{2}, -1+i)^T$

*(6 punti)*

5. Data una matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$, si dimostri che

   (a) $A$ possiede un'inversa destra se e solo se l'applicazione lineare $f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m, x \mapsto Ax$ è suriettiva
   (b) A possiede un'inversa sinistra se e solo se l'applicazione lineare $f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m, x \mapsto Ax$ è iniettiva.

*(6 punti)*

**Consegna: giovedì 10 gennaio 2019. Buone feste e buon anno nuovo!**