Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2013/15
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Prova intermedia per il Corso di Algebra Lineare

27 novembre 2014

Nota: Per ogni risposta è indispensabile fornire calcoli e/o spiegazioni !
Per superare la prova intermedia sono necessari almeno *9 punti*.

1. Si consideri l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 - x_4 \end{pmatrix}$$

   (a) Si determini la matrice A associata a f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$. (*1 punto*)

   (b) Si determini una base del nucleo di f. (*2 punti*)

   (c) Si decida se f è un'applicazione suriettiva. (*1 punto*)

   (d) Si trovino tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tali che $f(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (*2 punti*)

   (e) Si determini la matrice A' associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ e alla base $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ di $\mathbb{R}^2$. (*2 punti*)

2. Vero o falso? Si motivi la risposta!

   (a) Se $A \in M_{m\times n}$ è una matrice di rango $r < n$, allora l'applicazione f_A definita da $f_A(x) = Ax$ non è iniettiva. (*2 punti*)

   (b) Dati uno spazio vettoriale V di dimensione $\dim V = n$ e un insieme linearmente indipendente $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ di vettori in V, se $v_n \in V \setminus \{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$, allora $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di V. (*2 punti*)

3. Sia $A \in M_{n\times n}$ una matrice non nulla tale che $A^2 = -A$. Si dimostri che -1 è un autovalore di A. (*3 punti*)

Nome: ..... Matricola: ..... Punteggio totale:

Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2014/15
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Prova intermedia per il Corso di Algebra Lineare

27 novembre 2014

Nota: Per ogni risposta è indispensabile fornire calcoli e/o spiegazioni !
Per superare la prova intermedia sono necessari almeno *9 punti*.

1. Vero o falso? Si motivi la risposta!
   (a) Se $A \in M_{m\times n}$ è una matrice di rango $r < m$, allora l'applicazione f_A definita da $f_A(x) = Ax$ non è suriettiva. (*2 punti*)
   (b) Dati uno spazio vettoriale V di dimensione $\dim V = n$ e un insieme di generatori $\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ di V, l'insieme $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V. (*2 punti*)

2. Si consideri l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - 2x_3 \\ x_1 - x_2 + x_4 \end{pmatrix}$$

   (a) Si determini la matrice A associata a f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$. (*1 punto*)
   (b) Si determini una base del nucleo di f. (*2 punti*)
   (c) Si decida se f è un'applicazione suriettiva. (*1 punto*)
   (d) Si trovino tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tali che $f(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (*2 punti*)
   (e) Si determini la matrice A' associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ e alla base $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ di $\mathbb{R}^2$. (*2 punti*)

3. Sia $A \in M_{n\times n}$ una matrice non nulla tale che $A^2 = A$. Si dimostri che 1 è un autovalore di A. (*3 punti*)

Nome: ..... Matricola: ..... Punteggio totale: