Matematica e Statistica

Prima Prova Parziale (19/11/2009)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2009/10

$\boxed{\textbf{Tema A}}$

Matematica e Statistica

Prima Prova Parziale di $\boxed{\text{MATEMATICA}}$ (19/11/2009)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2009/10

Cognome-Nome ______________________________ Matr. ______________
IN STAMPATELLO

$\boxed{\textbf{Tema A}}$

1. Descrivere e disegnare[1] il sottoinsieme $A = \{x \in \mathbb{R} : 2 + \sin x \leq 3\cos 2x\,,\ x < 3\}$ della retta reale $\mathbb{R}$; dire se è sup./inf. limitato, calcolarne sup, inf, max, min; dire quali sono i suoi punti di accumulazione in $\widetilde{\mathbb{R}}$; dire di quali punti A è intorno.

2. Dati i punti $P(1, 3, -2)$ e $Q(0, 1, -1)$ e il vettore $\vec{v} = (2, 1, -1)$, descrivere in forma parametrica e cartesiana il piano Π passante per P e Q e parallelo a $\vec{v}$, e la retta r passante per l'origine e perpendicolare a $\vec{v}$ e a $\vec{w} = (0, -1, 3)$. Dove si intersecano Π e r?

3. Tracciare il grafico di $f(x) = 1 - \log(x + e)$.[2] Preso poi un punto P del grafico di f, siano P' e P'' i punti ottenuti proiettando perpendicolarmente P sull'asse x e sulla retta $x = -3$, e si consideri il rettangolo formato da questi punti e dal punto $(-3, 0)$. Per quale P tale rettangolo ha il perimetro più piccolo possibile?

4. Studiare l'andamento e tracciare il grafico di $g(x) = 2\,\mathrm{arctg}\,(x - 1) - |x|$.

[1] Si ricorda che $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

[2] Per farlo, si può studiare l'andamento della funzione col metodo generale; oppure, partendo dal grafico di $\log x$, ...

Matematica e Statistica

Prima Prova Parziale di STATISTICA (19/11/2009)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2009/10

Cognome-Nome ______________________________ Matr. ____________
IN STAMPATELLO

Tema A

Per ogni calcolo effettuato scrivere anche la formula teorica da utilizzare

1. Data la seguente distribuzione di frequenze:

x	frequenza
2	20
5	15
8	35
9	30

Calcolare:
(a) la media aritmetica, armonica e geometrica;
(b) la mediana e la moda, dando una breve definizione di entrambe;
(c) la varianza con un metodo a scelta.

2. Nella tabella seguente viene riportato il numero di articoli dedicati alla ricerca sulle cellule staminali pubblicati negli anni dal 2000 al 2003 in tutto il mondo:

Anno	N. articoli
2000	520
2001	480
2002	760
2003	960

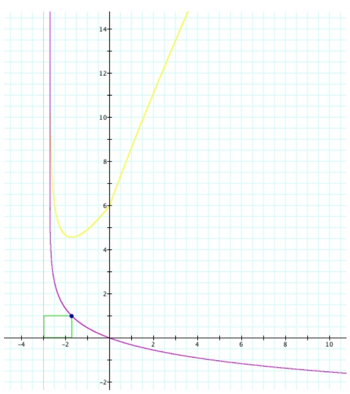
Sui dati presentati calcolare:
(a) i numeri indice a base fissa 2000;
(b) i numeri indice a base mobile;
(c) i numeri indice a base fissa 2002 tramite un opportuno coefficiente di raccordo;
(d) la media dei numeri indice a base mobile, indicando il tipo di media utilizzato.

$\boxed{\textbf{Tema A}}$ **- Soluzioni.**

$\boxed{\text{MATEMATICA}}$

(1) Essendo $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$ si ottiene $2 + \sin x \le 3\cos 2x = 3 - 6\sin^2 x$, cioè $6\sin^2 x + \sin x - 1 \le 0$; posto $t = \sin x$, la disequazione $6t^2 + t - 1 \le 0$ dà $-\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{3}$, da cui $-\frac{1}{2} \le \sin x \le \frac{1}{3}$, che, risolta in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ e posto $\alpha := \arcsin \frac{1}{3}$, dà $-\frac{\pi}{6} \le x \le \alpha$ oppure $\pi - \alpha \le x \le \frac{7\pi}{6}$, e poi basta sommare multipli interi di 2π agli estremi. Dobbiamo però intersecare con la condizione $x < 3$: essendo chiaramente $\pi - \alpha < 3 < \frac{7\pi}{6}$, si ricava che A è formato dall'unione di una famiglia inferiormente illimitata di intervalli chiusi e limitati e dall'intervallo semiaperto $[\pi - \alpha, 3[$. Dunque A è limitato solo superiormente (infatti 3 è un maggiorante), e vale $\sup A = 3$ (ma non è massimo perché non sta in A); i punti di accumulazione in $\widetilde{\mathbb{R}}$ sono $-\infty$, tutti i punti di A e anche il punto 3; infine A è intorno di tutti i punti interni (dunque non gli estremi) degli intervalli di cui è formato.

(2) Un altro vettore parallelo a Π è dato da $(1,3,-2) - (0,1,-1) = (1,2,-1)$, dunque si ha la forma parametrica $\Pi = \{(0,1,-1) + s(2,1,-1) + t(1,2,-1) : s,t \in \mathbb{R}\} = \{(2s+t, 1+s+2t, -1-s-t) : s,t \in \mathbb{R}\}$; da $x = 2s+t$ si ricava $t = x - 2s$, che messo in $y = 1+s+2t$ e $z = -1-s-t$ dà $y = 1+2x-3s$ e $z = -1-x+s$; mettendo poi $s = x+z+1$ nella prima si ottiene $y = 1 + 2x - 3x - 3z - 3$, ovvero la forma cartesiana $x + y + 3z + 2 = 0$. • Come noto, un vettore perpendicolare a $\vec{v} = (2,1,-1)$ e a $\vec{w} = (0,-1,3)$ è il prodotto vettoriale $v \wedge w = (2,-6,-2)$, o anche $(1,-3,-1)$ (trascurando l'inutile fattore 2): si ricava dunque la forma parametrica $r = \{(0,0,0) + t(1,-3,-1) : t \in \mathbb{R}\} = \{(t,-3t,-t) : t \in \mathbb{R}\}$, e sostituendo $t = x$ nelle altre due si trova anche una forma cartesiana data dal sistema delle equazioni $y = -3x$ e $z = -x$. • Una retta e un piano non paralleli tra loro (e di certo Π e r non lo sono, perché sono rispettivamente parallelo e perpendicolare a $\vec{v}$) si intersecano in uno e un solo punto. In effetti, dal sistema tra le equazioni cartesiane di Π e r si ottiene l'unico punto $(\frac{2}{5}, -\frac{6}{5}, -\frac{2}{5})$.



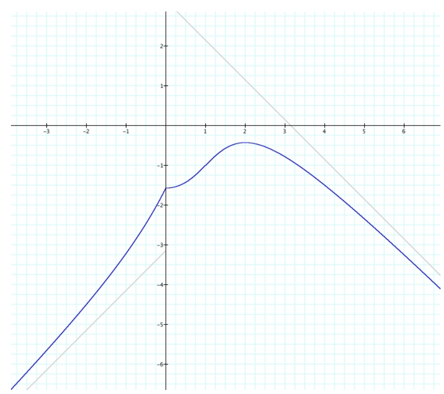


Fig. 1. Ex. 3: grafico di $f(x)$ e punto di perimetro minimo; in giallo appare anche il grafico di $F(x)$ (perimetro). **Fig. 2.** Ex. 4: grafico di $g(x)$.

(3) (Figura 1) La funzione $f(x) = 1 - \log(x+e)$ ha come grafico quello del logaritmo traslato a sinistra di e (il dominio è $x > -e$), cambiato di segno e alzato di 1: dunque è strettamente decrescente e si annulla quando $\log(x+e) = 1$, ovvero $x + e = e$, cioè in $x = 0$. • Per descrivere il punto P che si muove sul grafico di $f(x)$ converrà usare la stessa variabile x, dunque $P(x, 1 - \log(x+e))$: perciò sarà $P'(x,0)$, $P''(-3, 1 - \log(x+e))$, e il perimetro del rettangolo descritto sarà allora $F(x) = 2(|f(x)| + (x - (-3))) = 2(|1 - \log(x+e)| + x + 3)$ (si noti che la lunghezza dei lati orizzontali sarà sempre $x + 3 > 0$, mentre quella dei lati verticali richiede il modulo perché per $x < 0$ i punti del grafico stanno sopra l'asse y, e per $x > 0$ stanno sotto). La funzione $F(x)$, definita anch'essa per $x > -e$ come f, è derivabile ovunque tranne che in $x = 0$ (dove si annulla il contenuto del modulo, probabile punto angoloso). Derivando, essendo $\operatorname{sign}(1 - \log(x+e)) = -\operatorname{sign} x$ si ottiene $F'(x) = 2(\frac{\operatorname{sign} x}{x+e} + 1)$. Se $x < 0$ si ricava $F'(x) = 2(-\frac{1}{x+e} + 1)$, che si annulla in $x = -(e-1)$ ed è > 0 per $-(e-1) < x < 0$; invece se $x > 0$ si trova $F'(x) = 2(\frac{1}{x+e} + 1)$, che è sempre > 0. Pertanto il perimetro $F(x)$ decresce per $-e < x < -(e-1)$ e cresce poi (con un punto angoloso in $x = 0$, come previsto), assumendo dunque il minimo assoluto per $x = -(e-1)$ con valore $F(-(e-1)) = 2(5-e) \sim 4{,}5$: altrimenti detto, il punto P cercato è quello di ascissa $-(e-1)$.

(4) (Figura 2) La funzione $g(x) = 2\,\mathrm{arctg}\,(x-1) - |x|$ ha dominio $\mathbb{R}$, nessuna parità ne' periodo; è derivabile ovunque tranne che in $x = 0$, probabile punto angoloso; vale $g(0) = 2\,\mathrm{arctg}\,(-1) = 2(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\pi}{2} \sim -1{,}5$. Si ha $g(x) = 0$ se e solo se $\mathrm{arctg}\,(x-1) = \frac{1}{2}|x|$, ma un confronto grafico tra le funzioni $\mathrm{arctg}\,(x-1)$ (l'arco-tangente traslata a sinistra di 1) e $\frac{1}{2}|x|$ (il modulo con pendenza dimezzata) mostra che ciò non accade mai perché la seconda sta sempre sopra la prima: pertanto, poiché si ha $g(x) > 0$ se e solo se $\mathrm{arctg}\,(x-1) > \frac{1}{2}|x|$, possiamo concludere che vale sempre $g(x) < 0$. I limiti interessanti sono $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$; essendo $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm 1$ e $\lim_{x\to\mp\infty}(f(x) - (\pm x)) = \lim_{x\to\mp\infty} 2\,\mathrm{arctg}\,(x-1) = \mp\pi$, si ha che $y = x - \pi$ è asintoto obliquo a $-\infty$, e $y = -x + \pi$ a $+\infty$. Derivando (per $x \neq 0$) si trova $g'(x) = \frac{2}{1+(x-1)^2} - \mathrm{sign}\,x$: se $x < 0$ tale derivata diventa $g'(x) = \frac{2}{1+(x-1)^2} + 1$ (sempre > 0), mentre se $x > 0$ diventa $g'(x) = \frac{2}{1+(x-1)^2} - 1$, che si annulla per $x = 2$ ed è > 0 per $0 < x < 2$. (Osserviamo che in $x = 0$ si ha effettivamente un punto angoloso: facendo infatti i limiti sinistro e destro delle derivate si ottiene $g'_-(0) = 2$ e $g'_+(0) = 0$.) Ne ricaviamo che $g(x)$ cresce strettamente fino a $x = 0$ e da $x = 0$ a $x = 2$, e poi decresce: pertanto $x = 2$ è punto di massimo assoluto, col valore $g(2) = 2\,\mathrm{arctg}\,1 - 2 = -(2 - \frac{\pi}{2}) \sim -0{,}5$. Infine, derivando ancora si ottiene $g''(x) = \frac{4(x-1)}{(1+(x-1)^2)^2}$, dunque $g''(x) \geq 0$ per $x \geq 1$: pertanto $x = 1$ è un punto di flesso, con $g(1) = -1$ e $g'(-1) = 2 - 1 = 1$.

STATISTICA

(1) Sulla distribuzione di frequenze presentata in tabella, calcolare:
a) la media aritmetica, armonica e geometrica;
b) la mediana e la moda, dando una breve definizione di entrambe;
c) la varianza con un metodo a scelta.

x	f	x*f	f/x	ln(x)	ln(x)*f	x^2	x^2*f
2	20	40	10	0,6931	13,8629	4	80
5	15	75	3	1,6094	24,1416	25	375
8	35	280	4,375	2,0794	72,7805	64	2240
9	30	270	3,3333	2,1972	65,9167	81	2430
	100	**665**	**20,7083**	**6,5793**	**176,7017**		**5125**

a) Calcolo della media aritmetica, armonica e geometrica:

$$M(x) = \frac{\Sigma\, x * f}{\Sigma\, f} = \frac{665}{100} = \mathbf{6{,}65}$$

$$Ma(x) = \frac{\Sigma\, f}{\Sigma\, f/x} = \frac{100}{20{,}7083} = \mathbf{4{,}829}$$

$$\ln(Mg(x)) = \frac{\Sigma \ln(x) * f}{\Sigma\, f} = \frac{176{,}7017}{100} = \mathbf{1{,}767} \qquad Mg(x) = e^{1{,}767} = \mathbf{5{,}8534}$$

b) Calcolo della mediana e della moda:

x50°=< mediana =< x51°: **me = 8**
La mediana è l'elemento che occupa la posizione <u>centrale</u> nella distribuzione <u>ordinata</u> dei valori.

moda = 8
La moda è l'elemento della distribuzione con la frequenza più alta.

c) Calcolo della varianza (ad esempio utilizzando il secondo metodo):

$$V(x) = M(x^2) - m^2 = \frac{5125}{100} - 6{,}65^2 = 51{,}25 - 44{,}2225 = \mathbf{7{,}0275}$$

(2) Nella tabella seguente viene riportato il numero di articoli dedicati alla ricerca sulle cellule staminali pubblicati negli anni dal 2000 al 2003 in tutto il mondo. Sui dati presentati calcolare:
a) i numeri indice a base fissa 2000;
b) i numeri indice a base mobile;
c) i numeri indice a base fissa 2002 tramite un opportuno coefficiente di raccordo;
d) la media dei numeri indice a base mobile.

articoli su ricerca cellule staminali

anno	**n. articoli**	$I_{base\ 2000}$	$I_{base\ Mobile}$	$I_{base\ 2002}$	$\ln(I_{base\ Mobile})$
2000	520	1	-	0,6842	-
2001	480	0,9231	0,9231	0,6316	-0,08
2002	760	1,4615	1,5833	1	0,4595
2003	960	1,8462	1,2632	1,2632	0,2336
					0,6131

a) Calcolo dei numeri indice a base 2000 e a base mobile:

$I_{base\ 2000}$

$$\frac{x\ 2000}{x\ 2000} = \mathbf{1}$$

$$\frac{x\ 2001}{x\ 2000} = \mathbf{0{,}9231}$$

$$\frac{x\ 2002}{x\ 2000} = \mathbf{1{,}4615}$$

$$\frac{x\ 2003}{x\ 2000} = \mathbf{1{,}8462}$$

$I_{base\ mobile}$

$$\frac{x\ 2001}{x\ 2000} = \mathbf{0{,}9231}$$

$$\frac{x\ 2002}{x\ 2001} = \mathbf{1{,}5833}$$

$$\frac{x\ 2003}{x\ 2002} = \mathbf{1{,}2632}$$

b) Calcolo del coefficiente di raccordo e dei numeri indice a base 2002:

Coefficiente di raccordo 2000/2002 = $\frac{x\ 2000}{x\ 2002} = \frac{520}{760} = \mathbf{0{,}6842}$

La colonna degli $I_{base\ 2002}$ si ottiene moltiplicando la colonna $I_{base\ 2000}$ per il coefficiente di raccordo 0,6842

c) Calcolo della media dei numeri indice a base mobile:

Si utilizza la <u>media geometrica</u>:

$$\ln(Mg(I_{base\ Mobile})) = \frac{0{,}6131}{3} = \mathbf{0{,}2044}$$

$$\mathbf{Mg(I_{base\ Mobile})} = e^{0{,}2044} = \mathbf{1{,}2267}$$

Matematica e Statistica

Prima Prova Parziale (19/11/2009)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2009/10

Tema B

Matematica e Statistica

Prima Prova Parziale di $\boxed{\text{MATEMATICA}}$ (19/11/2009)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2009/10

Cognome-Nome ______________________________ Matr. ______________

IN STAMPATELLO

Tema B

1. Descrivere e disegnare[(1)] il sottoinsieme $A = \{x \in \mathbb{R} : 2 - \cos x + 3\cos 2x \leq 0\,,\ \ x > -\frac{3}{2}\}$ della retta reale $\mathbb{R}$; dire se è sup./inf. limitato, calcolarne sup, inf, max, min; dire quali sono i suoi punti di accumulazione in $\widetilde{\mathbb{R}}$; dire di quali punti A è intorno.

2. Descrivere in forma parametrica e cartesiana il piano Π passante per i punti $P(1, 0, -1)$ e $Q(0, -2, 0)$ e parallelo al vettore $\vec{v} = (2, 1, -1)$, e la retta r passante per l'origine e perpendicolare a $\vec{v}$ e a $\vec{w} = (2, 0, 2)$. Dove si intersecano Π e r?

3. Tracciare il grafico di $f(x) = \log(x + e) - 1$.[(2)] Preso poi un punto P del grafico di f, siano P' e P'' i punti ottenuti proiettando perpendicolarmente P sull'asse x e sulla retta $x = -4$, e si consideri il rettangolo formato da questi punti e dal punto $(-4, 0)$. Per quale P tale rettangolo ha il perimetro più piccolo possibile?

4. Studiare l'andamento e tracciare il grafico di $g(x) = |x| + 2\,\mathrm{arctg}\,(x + 1)$.

[(1)] Si ricorda che $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

[(2)] Per farlo, si può studiare l'andamento della funzione col metodo generale; oppure, partendo dal grafico di $\log x$, ...

Matematica e Statistica

Prima Prova Parziale di $\boxed{\text{STATISTICA}}$ (19/11/2009)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2009/10

Cognome-Nome ______________________________ Matr. ____________
IN STAMPATELLO

Tema B

Per ogni calcolo effettuato scrivere anche la formula teorica da utilizzare

1. Data la seguente distribuzione di frequenze:

x	frequenza
3	30
6	12
7	25
9	33

Calcolare:
(a) la media aritmetica, armonica e geometrica;
(b) la mediana e la moda, dando una breve definizione di entrambe;
(c) la varianza con un metodo a scelta.

2. Nella tabella seguente viene riportato il numero di nuove varietà di mais transgenico prodotte nei laboratori di tutto il mondo dal 2004 al 2007:

Anno	Varietà
2004	27
2005	32
2006	18
2007	54

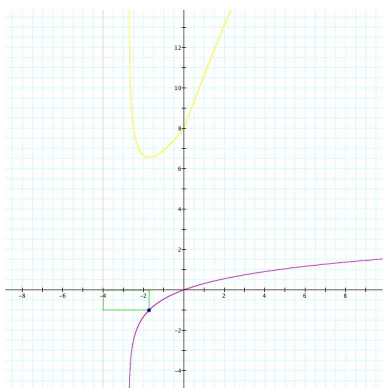
Sui dati presentati calcolare:
(a) i numeri indice a base fissa 2004;
(b) i numeri indice a base mobile;
(c) i numeri indice a base fissa 2006 tramite un opportuno coefficiente di raccordo;
(d) la media dei numeri indice a base mobile, indicando il tipo di media utilizzato.

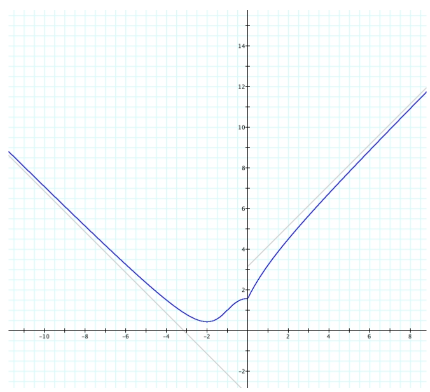
$\boxed{\textbf{Tema B}}$ **- Soluzioni.**

$\boxed{\text{MATEMATICA}}$

(1) Essendo $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$ si ottiene $2 - \cos x \leq -3\cos 2x = -6\cos^2 x + 3$, cioè $6\cos^2 x - \cos x - 1 \leq 0$; posto $t = \cos x$, la disequazione $6t^2 - t - 1 \leq 0$ dà $-\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{1}{2}$, da cui $-\frac{1}{3} \leq \cos x \leq \frac{1}{2}$, che, risolta in $[-\pi, \pi]$ e posto $\alpha := \arccos(-\frac{1}{3})$, dà $-\alpha \leq x \leq -\frac{\pi}{3}$ oppure $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \alpha$, e poi basta sommare multipli interi di 2π agli estremi. Dobbiamo però intersecare con la condizione $x > -\frac{3}{2}$: essendo chiaramente $-\alpha < -\frac{3}{2} < -\frac{\pi}{3}$, si ricava che A è formato dall'intervallo semiaperto $]-\frac{3}{2}, -\frac{\pi}{3}]$ e dall'unione di una famiglia superiormente illimitata di intervalli chiusi e limitati. Dunque A è limitato solo inferiormente (infatti $-\frac{3}{2}$ è un minorante), e vale $\inf A = -\frac{3}{2}$ (ma non è minimo perché non sta in A); i punti di accumulazione in $\widetilde{\mathbb{R}}$ sono $+\infty$, tutti i punti di A e anche il punto $-\frac{3}{2}$; infine A è intorno di tutti i punti interni (dunque non gli estremi) degli intervalli di cui è formato.

(2) Un altro vettore parallelo a Π è dato da $(1, 0, -1) - (0, -2, 0) = (1, 2, -1)$, dunque si ha la forma parametrica $\Pi = \{(0, -2, 0) + s(2, 1, -1) + t(1, 2, -1) : s, t \in \mathbb{R}\} = \{(2s + t, -2 + s + 2t, -s - t) : s, t \in \mathbb{R}\}$; da $x = 2s + t$ si ricava $t = x - 2s$, che messo in $y = -2 + s + 2t$ e $z = -s - t$ dà $y = -2 + 2x - 3s$ e $z = -x + s$; mettendo poi $s = x + z$ nella prima si ottiene $y = -2 + 2x - 3x - 3z$, ovvero la forma cartesiana $x + y + 3z + 2 = 0$. • Come noto, un vettore perpendicolare a $\vec{v} = (2, 1, -1)$ e a $\vec{w} = (2, 0, 2)$ è il prodotto vettoriale $v \wedge w = (2, -6, -2)$, o anche $(1, -3, -1)$ (trascurando l'inutile fattore 2): si ricava dunque la forma parametrica $r = \{(0, 0, 0) + t(1, -3, -1) : t \in \mathbb{R}\} = \{(t, -3t, -t) : t \in \mathbb{R}\}$, e sostituendo $t = x$ nelle altre due si trova anche una forma cartesiana data dal sistema delle equazioni $y = -3x$ e $z = -x$. • Una retta e un piano non paralleli tra loro (e di certo Π e r non lo sono, perché sono rispettivamente parallelo e perpendicolare a $\vec{v}$) si intersecano in uno e un solo punto. In effetti, dal sistema tra le equazioni cartesiane di Π e r si ottiene l'unico punto $(\frac{2}{5}, -\frac{6}{5}, -\frac{2}{5})$.





(1) Ex. 3: grafico di $f(x)$ e punto di perimetro minimo; in giallo appare anche il grafico di $F(x)$ (perimetro). **(2)** Ex. 4: grafico di $g(x)$.

(3) (Figura 1) La funzione $f(x) = \log(x + e) - 1$ ha come grafico quello del logaritmo traslato a sinistra di e (il dominio è $x > -e$) e abbassato di 1: dunque è strettamente crescente e si annulla quando $\log(x + e) = 1$, ovvero $x + e = e$, cioè in $x = 0$. • Per descrivere il punto P che si muove sul grafico di $f(x)$ converrà usare la stessa variabile x, dunque $P(x, \log(x + e) - 1)$: perciò sarà $P'(x, 0)$, $P''(-4, \log(x + e) - 1)$, e il perimetro del rettangolo descritto sarà allora $F(x) = 2(|f(x)| + (x - (-4))) = 2(|\log(x + e) - 1| + x + 4)$ (si noti che la lunghezza dei lati orizzontali sarà sempre $x + 4 > 0$, mentre quella dei lati verticali richiede il modulo perché per $x < 0$ i punti del grafico stanno sotto l'asse y, e per $x > 0$ stanno sopra). La funzione $F(x)$, definita anch'essa per $x > -e$ come f, è derivabile ovunque tranne che in $x = 0$ (dove si annulla il contenuto del modulo, probabile punto angoloso). Derivando, essendo $\operatorname{sign}(\log(x + e) - 1) = \operatorname{sign} x$ si ottiene $F'(x) = 2(\frac{\operatorname{sign} x}{x+e} + 1)$. Se $x < 0$ si ricava $F'(x) = 2(-\frac{1}{x+e} + 1)$, che si annulla in $x = -(e-1)$ ed è > 0 per $-(e-1) < x < 0$; invece se $x > 0$ si trova $F'(x) = 2(\frac{1}{x+e} + 1)$, che è sempre > 0. Pertanto il perimetro $F(x)$ decresce per $-e < x < -(e-1)$ e cresce poi (con un punto angoloso in $x = 0$, come previsto), assumendo dunque il minimo assoluto per $x = -(e-1)$ con valore $F(-(e-1)) = 2(6 - e) \sim 6{,}5$: altrimenti detto, il punto P cercato è quello di ascissa $-(e-1)$.

(4) (Figura 2) La funzione $g(x) = |x| + 2\operatorname{arctg}(x + 1)$ ha dominio $\mathbb{R}$, nessuna parità ne' periodo; è derivabile ovunque tranne che in $x = 0$, probabile punto angoloso; vale $g(0) = 2\operatorname{arctg}(1) = 2(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2} \sim 1{,}5$. Si ha $g(x) = 0$ se e solo se $\operatorname{arctg}(x+1) = -\frac{1}{2}|x|$, ma un confronto grafico tra le funzioni $\operatorname{arctg}(x+1)$ (l'arco-tangente traslata a destra di 1) e $-\frac{1}{2}|x|$ (il modulo cambiato di segno e con pendenza dimezzata) mostra che ciò non accade mai perché la prima sta sempre sopra la seconda: pertanto, poiché si ha $g(x) > 0$ se e solo se $\operatorname{arctg}(x+1) > -\frac{1}{2}|x|$, possiamo concludere che vale sempre $g(x) > 0$. I limiti interessanti sono $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$; essendo $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{x} = \mp 1$ e $\lim_{x\to\mp\infty}(f(x) - (\mp x)) = \lim_{x\to\mp\infty} 2\operatorname{arctg}(x+1) = \mp\pi$, si ha che $y = -x - \pi$ è asintoto obliquo a $-\infty$, e $y = x + \pi$ a $+\infty$. Derivando (per $x \neq 0$) si trova $g'(x) = \operatorname{sign} x + \frac{2}{1+(x+1)^2}$: se $x > 0$ tale derivata diventa $g'(x) = 1 + \frac{2}{1+(x+1)^2}$ (sempre > 0), mentre se $x < 0$ diventa $g'(x) = -1 + \frac{2}{1+(x+1)^2}$, che si annulla per $x = -2$ ed è > 0 per $-2 < x < 0$. (Osserviamo che in $x = 0$ si ha effettivamente un punto angoloso: facendo infatti i limiti sinistro e destro delle derivate si ottiene $g'_-(0) = 0$ e $g'_+(0) = 2$.) Ne ricaviamo che $g(x)$ decresce strettamente fino a $x = -2$, poi cresce fino a $x = 0$ e anche da $x = 0$ in poi: pertanto $x = -2$ è punto di minimo assoluto, col valore $g(-2) = 2 + 2\operatorname{arctg}(-1) = 2 - \frac{\pi}{2} \sim 0{,}5$. Infine, derivando ancora si ottiene $g''(x) = -\frac{4(x+1)}{(1+(x+1)^2)^2}$, dunque $g''(x) \geq 0$ per $x \leq -1$: pertanto $x = -1$ è un punto di flesso, con $g(-1) = 1$ e $g'(-1) = -1 + 2 = 1$.

STATISTICA

(1) Sulla distribuzione di frequenze presentata in tabella, calcolare:
a) la media aritmetica, armonica e geometrica;
b) la mediana e la moda, dando una breve definizione di entrambe;
c) la varianza con un metodo a scelta.

x	f	x*f	f/x	ln(x)	ln(x)*f	x^2	x^2*f
3	30	90	10	1,0986	32,9584	9	270
6	12	72	2	1,7918	21,5011	36	432
7	25	175	3,571	1,9459	48,6478	49	1225
9	33	297	3,6667	2,1972	72,5084	81	2673
	100	**634**	**19,2381**	**7,0335**	**175,6156**		**4600**

a) Calcolo della media aritmetica, armonica e geometrica:

$$\mathbf{M(x)} = \frac{\Sigma\, x * f}{\Sigma\, f} = \frac{634}{100} = \mathbf{6{,}34}$$

$$\mathbf{Ma(x)} = \frac{\Sigma\, f}{\Sigma\, f/x} = \frac{100}{19{,}2381} = \mathbf{5{,}198}$$

$$\ln(Mg(x)) = \frac{\Sigma \ln(x) * f}{\Sigma\, f} = \frac{175{,}6156}{100} = \mathbf{1{,}7562} \qquad \mathbf{Mg(x)} = e^{1,756} = \mathbf{5{,}7901}$$

b) Calcolo della mediana e della moda:

x50°=< mediana =< x51°: **me = 7**
La mediana è l'elemento che occupa la posizione centrale nella distribuzione ordinata dei valori.

moda = 9
La moda è l'elemento della distribuzione con la frequenza più alta.

c) Calcolo della varianza (ad esempio utilizzando il secondo metodo):

$$\mathbf{V(x)} = M(x^2) - m^2 = \frac{4600}{100} - 6{,}34^2 = 46 - 40{,}1956 = \mathbf{5{,}8044}$$

(2) Nella tabella seguente viene riportato il numero di nuove varietà di mais transgenico prodotte nei laboratori di tutto il mondo dal 2004 al 2007. Sui dati presentati calcolare:
a) i numeri indice a base fissa 2004;
b) i numeri indice a base mobile;
c) i numeri indice a base fissa 2006 tramite un opportuno coefficiente di raccordo;
d) la media dei numeri indice a base mobile.

articoli su ricerca cellule staminali

anno	**n. varietà**	$I_{base\ 2004}$	$I_{base\ Mobile}$	$I_{base\ 2006}$	$\ln(I_{base\ Mobile})$
2004	27	1	-	1,5	-
2005	32	1,1852	1,1852	1,7778	0,17
2006	18	0,6667	0,5625	1	-0,5754
2007	54	2	3	3	1,0986
					0,6931

a) Calcolo dei numeri indice a base 2004 e a base mobile:

$I_{base\ 2004}$

$$\frac{x\ 2004}{x\ 2004} = \mathbf{1}$$

$$\frac{x\ 2005}{x\ 2004} = \mathbf{1{,}1852}$$

$$\frac{x\ 2006}{x\ 2004} = \mathbf{0{,}6667}$$

$$\frac{x\ 2007}{x\ 2004} = \mathbf{2}$$

$I_{base\ mobile}$

$$\frac{x\ 2005}{x\ 2004} = \mathbf{1{,}1852}$$

$$\frac{x\ 2006}{x\ 2005} = \mathbf{0{,}5625}$$

$$\frac{x\ 2007}{x\ 2006} = \mathbf{3}$$

b) Calcolo del coefficiente di raccordo e dei numeri indice a base 2006:

Coefficiente di raccordo 2004/2006 = $\frac{x\ 2004}{x\ 2006} = \frac{27}{18} = \mathbf{1{,}5}$

La colonna degli $I_{base\ 2006}$ si ottiene moltiplicando la colonna $I_{base\ 2004}$ per il coefficiente di raccordo 1,5

c) Calcolo della media dei numeri indice a base mobile:

Si utilizza la media geometrica:

$$\ln(Mg(I_{base\ Mobile})) = \frac{0{,}6931}{3} = \mathbf{0{,}231}$$

$$\mathbf{Mg(I_{base\ Mobile})} = e^{0{,}231} = \mathbf{1{,}2599}$$