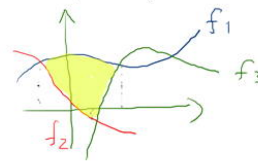
**MATEMATICA**
Università di Verona
Laurea in Biotecnologie - A.A. 2012/13
**Lezione di martedì 4/12/2012**

INTEGRAZIONE

1. Trovare le primitive (le anti-derivate) di una data funzione
   (Ex. $\alpha(x) = x^2$ derivata $2x$ primitive $x^3/3 + K$ $(K \in \mathbb{R})$)
2. Calcolare l'area compresa tra grafici di funzioni




Concentriamoci sul problema 1 (calcolo delle primitive, o antiderivate)

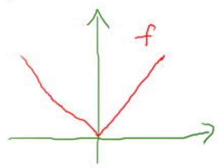
---

Sia $A$ un intervallo di $\mathbb{R}$, e sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua.
Una primitiva (o antiderivata) (o "integrale indefinito") di $f$ è una funz. $F : A \to \mathbb{R}$ derivabile tale che $F' = f$

Primo problema: data una funzione continua $f$, esiste sempre qualche sua primitiva? Sì

Prop. || Se $f$ è di classe $\mathcal{C}^k$, esiste qualche primitiva di classe $\mathcal{C}^{k+1}$ (lo dimostreremo presto)

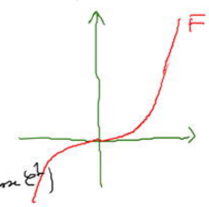
Es. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = |x|$
$f$ è solo continua (di classe $\mathcal{C}^0$)




Una primitiva è $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \begin{cases} x^2/2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2/2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$F$ è diventata derivabile con derivata continua (di classe $\mathcal{C}^1$)




Secondo problema: Se sono capace di trovare una primitiva, tutte le altre come sono fatte?

Prop. || Se $f : A \to \mathbb{R}$ ($A$ intervallo) è continua e $F : A \to \mathbb{R}$ è una sua primitiva, tutte le altre primitive sono del tipo $F(x) + K$ (ove $K \in \mathbb{R}$).

Dim. Sia $\tilde{F} : A \to \mathbb{R}$ un'altra primitiva di $f$. Allora

$$\left(\tilde{F}(x) - F(x)\right)' = \tilde{F}'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) \equiv 0 \overset{(A \text{ intervallo})}{\Longrightarrow} \tilde{F}(x) - F(x) \equiv K \quad \square$$

Ora cominciamo a imparare metodi per trovare le primitive di una data funzione $f$, ovvero (come si dice) per "integrare" $f$.

Notazione: la famiglia delle primitive di $f$ si denota con il simbolo $\int f(x)\,dx$

$$\int f(x)\,dx = \{ F : A \to \mathbb{R} : F' = f \}$$ integrale indefinito di $f$

Ex

$$\int x^2\,dx = x^3/3 + K \quad (K \in \mathbb{R}) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + K$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + K \qquad \int x^3 \cos 2x\,dx = ???$$

$$\boxed{\int \alpha'(x)\,dx = \alpha(x) + K}$$

INTEGRALI IMMEDIATI

$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + k \qquad \int \frac{1}{2+x^2}\,dx = ???$

$\int x^7\,dx = x^8/8 + k \qquad \underset{(\alpha \neq -1)}{\int x^\alpha\,dx} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + K \qquad \int \overbrace{\cos x}^{\varphi'(x)}\ \overbrace{\sin^7 x}^{\varphi(x)^\alpha}\,dx = \frac{\sin^8 x}{8} + K$

$\int \frac{\overset{\varphi'(x)}{2x}}{\underset{\varphi(x)}{x^2+1}}\,dx = \log|\varphi(x)| + K$

LINEARITÀ DELL'INTEGRALE  Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $f, g : A \to \mathbb{R}$ funzioni continue, allora

$$\int \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$$

Es. $\int (5x^3 - 7\cos x)\,dx = 5\int x^3\,dx - 7\int \cos x\,dx = 5\,\frac{x^4}{4} - 7\sin x + K$

Attenzione $\cancel{\int f(x)g(x)\,dx = \left(\int f(x)\,dx\right)\left(\int g(x)\,dx\right)}$ No!

$\int \overset{"\varphi'(x)"}{\sin x}\, e^{\overset{\varphi(x)}{\cos x}}\,dx = -\int \overset{\varphi'(x)}{(-\sin x)}\, e^{\overset{\varphi(x)}{\cos x}}\,dx = -e^{\cos x} + K$

$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{\overset{\varphi'(x)}{-\sin x}}{\underset{\varphi(x)}{\cos x}}\,dx = -\log|\cos x| + K$

$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \int \frac{\overset{\varphi'(x)}{\cos x}}{\underset{\varphi(x)}{\sin x}}\,dx = \log|\sin x| + K$

$\int \left(x^3 + \frac{e^x}{\sqrt[5]{e^x-1}}\right)dx = \int x^3\,dx + \int \frac{e^x}{\sqrt[5]{e^x-1}}\,dx = \frac{x^4}{4} + \int \overset{\varphi'(x)}{e^x}\,\underset{\varphi(x)}{(e^x-1)}^{\overset{\alpha}{-1/5}}\,dx =$

$= x^4/4 + \frac{(e^x-1)^{4/5}}{4/5} + K = \frac{1}{4}\left(x^4 + 5\sqrt[5]{(e^x-1)^4}\right) + K$

$\int \frac{\sin x - 1}{\cos x + x}\,dx = -\int \frac{\overset{\varphi'(x)}{-\sin x + 1}}{\underset{\varphi(x)}{\cos x + x}} = -\log|\cos x + x| + K$

$\int \frac{\sin x + \overset{-1+2}{1}}{\cos x + x}\,dx = \int \frac{\sin x - 1}{\cos x + x} + 2\int \frac{1}{\cos x + x}\,dx = -\log|\cos x + x| + ???$

$\int e^x \cos(e^x)\,dx = \sin(e^x) + K$

$\int \sqrt[3]{1-2x}\,dx = \int (1-2x)^{1/3}\,dx = \frac{1}{-2}\int \overset{\varphi'(x)}{(-2)}\,\overset{\varphi(x)}{(1-2x)}^{\overset{\alpha}{1/3}}\,dx = -\frac{1}{2}\,\frac{(1-2x)^{1/3+1}}{1/3+1} = -\frac{3}{8}(1-2x)^{4/3} + K$

SOSTITUZIONE $\quad \int f(x)\,dx = \int f(\beta(t))\,\beta'(t)\,dt \quad$ ove $x = \beta(t)$

Es. $1-2x = t \quad x = \frac{1-t}{2} = \beta(t)$

$\int \sqrt[3]{1+2x}\,dx = \int \sqrt[3]{t}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dt =$
$= -\frac{1}{2}\,\frac{t^{4/3}}{4/3} + K = -\frac{3}{8}t^{4/3} + K$

Metodo "più spedito" per usare la sostituzione.

$$\int \sqrt[3]{1-2x}\,dx \quad \begin{bmatrix} 1-2x = t \\ -2\,dx = dt \\ dx = -\frac{1}{2}dt \end{bmatrix} = \int \sqrt[3]{t}\left(-\tfrac{1}{2}dt\right) = -\frac{1}{2}\int \sqrt[3]{t}\,dt = -\frac{1}{2}\,\frac{t^{4/3}}{4/3} + k = -\frac{3}{8}t^{4/3} + k = -\frac{3}{8}(1-2x)^{4/3} + k$$

$$\int e^x \cos(e^x)\,dx \quad \begin{bmatrix} e^x = t \\ e^x\,dx = dt \\ dx = \frac{1}{e^x}dt = \frac{1}{t}dt \end{bmatrix} = \int \cancel{t}\cos(t)\cdot\frac{1}{\cancel{t}}\,dt = \int \cos(t)\,dt = \sin(t) + k = \sin(e^x) + k$$

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = \int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx \quad \begin{bmatrix} x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{bmatrix} = \int \frac{1}{\underbrace{\cancel{t^2+t}}_{t+1}}\,2\cancel{t}\,dt = 2\int \frac{1}{t+1}\,dt = 2\log|t+1| + k = 2\log|\sqrt{x}+1| + k$$

$$\int \left(3e^{2x} - 3\cos(3x-1)\right)dx = 3\left(\int e^{2x}\,dx - \int \cos(3x-1)\,dx\right) = 3\left(\frac{1}{2}\int \underbrace{2}_{\varphi'(x)} e^{\overbrace{2x}^{\varphi(x)}}\,dx - \int \cos(t)\cdot\frac{1}{3}dt\right)$$

$3x-1=t$, $3\,dx = dt$, $dx = \frac{1}{3}dt$

$$= 3\left(\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{3}\sin(t)\right) + k = \frac{3}{2}e^{2x} - \sin(3x-1) + k$$

$$\int \frac{\sin(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx \quad \begin{bmatrix} x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{bmatrix} = \int \frac{\sin(2t)}{\cancel{t}}\,2\cancel{t}\,dt = \int \overbrace{2}^{\varphi'(x)}\sin(\overbrace{2t}^{\varphi(x)})\,dt = -\cos(2t) + k = -\cos(2\sqrt{x}) + k$$

$$\int \left(2x - \sqrt[4]{x-1}\right)dx = \int 2x\,dx - \int \underbrace{\sqrt[4]{x-1}}_{(x-1)^{1/4}}\,dx = x^2 - \frac{(x-1)^{5/4}}{5/4} + k = x^2 - \frac{4}{5}(x-1)\sqrt[4]{x-1} + k$$

$$\int \sin^2(x)\,dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int\left(1-\cos(2x)\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int 1\,dx - \int \cos(2x)\,dx\right) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right) + k$$
$$= \frac{x - \sin x\cos x}{2}$$

! bisezione $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

$\alpha/2 = x$ e elevo al quadrato

$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$

$$\int \cos^2(x)\,dx = \int \left(1-\sin^2 x\right)dx = \int 1\,dx - \int \sin^2 x\,dx = x - \frac{x-\sin x\cos x}{2} + k = \frac{x+\sin x\cos x}{2} + k$$

$$\int \left(2\cos(3x) - 3e^{1-2x}\right)dx = 2\int \cos(3x)\,dx - 3\int e^{1-2x}\,dx = \frac{2}{3}\sin(3x) - 3\int e^t\cdot\left(-\frac{1}{2}dt\right)$$

$t = 1-2x$, $dt = -2\,dx$, $dx = -\frac{1}{2}dt$

$$= \frac{2}{3}\sin(3x) + \frac{3}{2}e^{1-2x} + k$$

$F$ $g$ — $f = 1$, $G = -\cos x$

$\int x \sin x\,dx$ un integrale così si risolve solitamente "per parti"

$\int x\sin x\,dx = x(-\cos x) - \int 1\cdot(-\cos x)\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + K$

Parliamo di "integrazione per parti". Siano $F(x)$ e $G(x)$ due funzioni, e denotiamo le loro derivate con $f(x)$ e $g(x)$. Allora per Leibniz $\left(F(x)G(x)\right)' = f(x)G(x) + F(x)g(x)$

Ne consegue che $\underbrace{\int \left(F(x)G(x)\right)'dx}_{F(x)G(x)} = \int f(x)G(x)\,dx + \int F(x)g(x)\,dx$ perciò

$$\boxed{\text{INTEGRAZIONE PER PARTI} \quad \int F(x)g(x)\,dx = F(x)G(x) - \int f(x)G(x)}$$

$$\int \overset{F}{x^2}\,\overset{g}{e^x}\,dx \overset{\substack{f=2x\\ G=e^x}}{=} x^2e^x-\int 2x\cdot e^x\,dx = x^2e^x - 2\int \overset{F}{x}\,\overset{g}{e^x}\,dx \quad \substack{f=1\\ G=e^x} \qquad \boxed{\int Fg = FG - \int fG}$$

$$= x^2e^x - 2\left(xe^x - \int 1\cdot e^x\,dx\right) = x^2e^x - 2\left(xe^x - e^x\right) + K$$

$$= \left(x^2-2x+2\right)e^x + K \qquad \left(\text{Verifica: } \left((x^2-2x+2)e^x\right)' = (\cancel{2x}-\cancel{2})e^x + (x^2-\cancel{2x}+\cancel{2})e^x = x^2e^x\right)$$

$$\int \log x\,dx = \int \overset{g}{1}\cdot\overset{F}{\log x}\,dx \overset{\substack{f=1/x\\ G=x}}{=} x\log x - \int \frac{1}{\cancel{x}}\cdot \cancel{x}\,dx = x\log x - x + K = x(\log x - 1) + K$$

$$\left(\text{idem: } \int \log|x|\,dx = x\left(\log|x|-1\right) + K\right)$$

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = \int \overset{g}{1}\cdot\overset{F}{\operatorname{arctg} x}\,dx \overset{\substack{f=\frac{1}{1+x^2}\\ G=x}}{=} x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{\overset{\varphi'(x)}{2x}}{\underset{\varphi(x)}{1+x^2}}\,dx$$

$$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + K$$

$$A \quad \int \overset{F}{e^{2x}}\,\overset{g}{\cos(3x)}\,dx \overset{\substack{f=2e^{2x}\\ G=\int\cos(3x)dx=\frac{1}{3}\sin(3x)}}{=} \frac{1}{3}\cdot e^{2x}\sin(3x) - \int 2e^{2x}\cdot\frac{1}{3}\sin 3x\,dx$$

$$= \frac{1}{3}e^{2x}\sin(3x) - \frac{2}{3}\int \overset{F}{e^{2x}}\,\overset{g}{\sin(3x)}\,dx = \frac{1}{3}e^{2x}\sin(3x) - \frac{2}{3}\left(e^{2x}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right) - \int (2e^{2x})\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)dx\right)$$

$$f=2e^{2x} \quad G=\int \sin(3x)\,dx = -\frac{1}{3}\cos(3x)$$

$$= \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x - \frac{4}{9}\int e^{2x}\cos 3x\,dx \;\; A \qquad A + \frac{4}{9}A = \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x$$

$$\frac{13}{\cancel{9}}A = \frac{1}{\cancel{9}}e^{2x}\left(3\sin 3x + 2\cos 2x\right) \qquad A = \frac{3\sin 3x + 2\cos 3x}{13}e^{2x} + K$$

<u>Esercizi per casa</u> (che faremo venerdì)

$$\int x^2\log x\,dx \qquad \int\left(\sqrt{5-3x} - 2e^{\sqrt{x}}\right)dx \qquad \int\left(\frac{3}{4+7x} - 5\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right)dx$$

$$\int \log(\sqrt{x}+1)\,dx \qquad \int\left(4x^3 + x^2\sin x\right)dx \qquad \int \sqrt{x}\log x\,dx$$

Faremo gli integrali del tipo $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ ove $P$ e $Q$ polinomi e $Q$ di grado $\leq 2$.

**MATEMATICA**
Università di Verona
Laurea in Biotecnologie - A.A. 2012/13
**Lezione di venerdì 7/12/2012**

Esercizi per casa (dati la volta scorsa)

$$\int x^2 \log x \, dx \qquad \int \left(\sqrt{5-3x} - 2e^{\sqrt{x}}\right) dx \qquad \int \left(\frac{3}{4+7x} - 5\sin^2\left(x-\tfrac{\pi}{6}\right)\right) dx$$

$$\int \log(\sqrt{x}+1)\, dx \qquad \int \left(4x^3 + x^2 \sin x\right) dx \qquad \int \sqrt{x}\, \log x \, dx$$

Risoluzione

INT. PER PARTI $\int Fg = FG - \int fG$

$f = 1/x \quad G = x^3/3$

- $\int \overset{g}{x^2}\, \overset{F}{\log x}\, dx = \frac{x^3}{3}\log x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\, dx = \frac{x^3}{3}\log x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}\log x - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{9}(3\log x - 1) + K$

- $\int\left(\sqrt{5-3x} - 2e^{\sqrt{x}}\right)dx = \int \sqrt{5-3x}\, dx - 2\int e^{\sqrt{x}} dx = \int \sqrt{t}\left(-\frac{1}{3}dt\right) - 2\int e^u\, 2u\, du =$

$t = 5-3x$, $dt = -3dx$; $x = u^2$, $dx = 2u\,du$

$= -\frac{1}{3}\int \sqrt{t}\, dt - 4\int \overset{F}{u}\, \overset{g}{e^u}\, du = -\frac{1}{3}\frac{t^{3/2}}{3/2} - 4\left(ue^u - \int 1\cdot e^u du\right) = -\frac{2}{9}t\sqrt{t} - 4(u-1)e^u + K$

$f = 1 \quad G = e^u$

$= -\frac{2}{9}(5-3x)\sqrt{5-3x} - 4(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + K$

- $\int\left(\frac{3}{4+7x} - 5\sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right)dx = \frac{3}{7}\int\frac{7}{4+7x}dx - 5\int \sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)dx = \frac{3}{7}\log|4+7x| - 5\int \sin^2 t\, dt$

$x - \pi/6 = t$, $dx = dt$

$= \frac{3}{7}\log|4+7x| - 5\cdot\frac{t - \sin t\cos t}{2} = \frac{3}{7}\log|4+7x| - \frac{5}{2}\left(x - \frac{\pi}{6} - \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right) + K$

- $\int \log(\sqrt{x}+1)\, dx = \int \log(u+1)\cdot 2u\, du = 2\int \overset{g}{u}\, \overset{F}{\log(u+1)}\, du = 2\left(\frac{u^2}{2}\log(u+1) - \int\frac{1}{u+1}\cdot\frac{u^2}{2}du\right)$

$x = u^2$, $dx = 2u\,du$; $f = \frac{1}{u+1} \quad G = \frac{u^2}{2}$

$= u^2\log(u+1) - \int\frac{u^2}{u+1}du \rightarrow \int\frac{(u^2-1)+1}{u+1}du = \int\left(u - 1 + \frac{1}{u+1}\right)du = \int u\, du - \int 1\, du + \int\frac{1}{u+1}du = \frac{u^2}{2} - u + \log|u+1|$

Riassumendo:

$u^2\log(u+1) - \frac{u^2}{2} + u - \log|u+1| = (u^2-1)\log|u+1| - \frac{u^2}{2} + u + K$

e ora basta risostituire $u = \sqrt{x}$.

- $\int(4x^3 + x^2\sin x)dx = 4\int x^3 dx + \int \overset{F}{x^2}\, \overset{g}{\sin x}\, dx = 4\frac{x^4}{4} + \left(x^2(-\cos x) - \int 2x(-\cos x)dx\right)$

$f = 2x \quad G = -\cos x$

$= x^4 - x^2\cos x + 2\int \overset{F}{x}\, \overset{g}{\cos x}\, dx = x^4 - x^2\cos x + 2\left(x\sin x - \int 1\cdot\sin x\, dx\right) = x^4 - x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + K$

$f = 1 \quad G = \sin x$

- $\int\sqrt{x}\log x\, dx = \int t\log(t^2)\cdot 2t\, dt = 4\int t^2\log t\, dt = 4\cdot\frac{t^3}{9}(3\log t - 1) + K$

$x = t^2$, $dx = 2t\,dt$; FATTO PRIMA

$= \frac{4}{9}x\sqrt{x}\left(3\log\sqrt{x} - 1\right) + K$

$= \frac{4}{9}x\sqrt{x}\left(\frac{3}{2}\log x - 1\right) + K$

## INTEGRALI DI FUNZIONI RAZIONALI

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \quad \text{ove } P, Q \text{ polinomi.}$$

In realtà parleremo solo del caso in cui $\boxed{\deg Q(x) \le 2}$

- 1° caso (più facile): $\deg Q = 0$ ($Q$ è costante $\Rightarrow$ si sta integrando un polinomio).

  Ex
  $$\int \left(5x^3 - \tfrac{7}{4}x + 8\right)dx = 5\int x^3\,dx - \tfrac{7}{4}\int x\,dx + 8\int 1\,dx = \frac{5}{4}x^4 - \frac{7}{8}x^2 + 8x + K$$

- 2° caso $\deg Q = 1$, cioè $Q(x) = ax+b$

  Ex
  $$\int \frac{8x^3-7x+1}{\underbrace{2x-1}_{t}}\,dx \quad \begin{pmatrix} 2x-1 = t \\ 2dx = dt \\ x = \frac{t+1}{2} \end{pmatrix} = \int \frac{8\left(\frac{t+1}{2}\right)^3 - 7\left(\frac{t+1}{2}\right) + 1}{t}\,\frac{1}{2}\,dt =$$

  $$= \frac{1}{2}\int \frac{(t+1)^3 - \frac{7}{2}(t+1) + 1}{t}\,dt = \frac{1}{4}\int \frac{2(t+1)^3 - 7(t+1) + 2}{t}\,dt$$

  $$= \frac{1}{4}\int \frac{2t^3+6t^2+6t+2-7t-7+2}{t}\,dt = \frac{1}{4}\int \frac{2t^3+6t^2-t-3}{t}\,dt$$

  PUNTO IMPORTANTE
  $$= \frac{1}{4}\int \left(2t^2+6t-1-\frac{3}{t}\right)dt = \frac{1}{4}\left(\frac{2t^3}{3} + \frac{6t^2}{2} - t - 3\log|t|\right) + K$$

  e infine basta risostituire $t = 2x-1$

- 3° caso $\deg Q(x) = 2$ $\qquad \displaystyle\int \frac{P(x)}{ax^2+bx+c}\,dx$ come si fa?

Prima cosa: possiamo limitarci a imparare come si fa solo nel caso in cui $\deg P = 1$ ($< \deg Q = 2$).
Perché? Perché, se $\deg P \ge 2$, prima facciamo la divisione con $Q$ ottenendo un quoziente e un resto, e alla fine mi ritrovo con un integrale da sapere fare con una cosa con $\deg = 1$

$\boxed{\text{Ex}}$
$$\int \frac{x^5}{x^2-x-2}\,dx$$

$$\begin{array}{l|l}
x^5 & x^2-x-2 \\ \hline
-x^5+x^4+2x^3 & x^3+x^2+3x+6 \\
\quad // \quad x^4+2x^3 & \\
\quad -x^4+x^3+2x^2 & \\
\quad // \quad 3x^3+2x^2 & \\
\quad -3x^3+4x^2+6x & \\
\quad // \quad 6x^2+6x & \\
\quad -6x^2+6x+12 & \\
\quad // \quad 12x+12 &
\end{array}$$

$$x^5 = (x^2-x-2)\underbrace{(x^3+x^2+3x+6)}_{\text{quoziente}} + \underbrace{(12x+12)}_{\text{resto}}$$

$$= \int \frac{(x^2-x-2)(x^3+x^2+3x+6) + 12(x+1)}{x^2-x-2}\,dx$$

$$= \int \left(x^3+x^2+3x+6 + \frac{12(x+1)}{x^2-x-2}\right)dx$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 6x + 12\int \frac{x+1}{x^2-x-2}\,dx$$

è quindi ciò che devo imparare a fare!

$\boxed{\text{Ex}}$
$$\int \frac{x^2-x}{2x^2+1}\,dx = \int \frac{\overbrace{\tfrac{1}{2}}^{\text{quoz.}}(2x^2+1) - \overbrace{(x+\tfrac{1}{2})}^{\text{resto}}}{2x^2+1}\,dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{x+\frac{1}{2}}{2x^2+1}\right)dx = \frac{x}{2} - \int \frac{x+\frac{1}{2}}{2x^2+1}\,dx$$

è quindi ciò che devo imparare a fare!

Impariamo dunque a calcolare gli integrali del tipo $\displaystyle\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\,dx$

Ci sono tre eventualità a seconda che $\Delta$ del denominatore sia $>0$, $=0$, $<0$.

I° caso: $\Delta>0$ Il denom. ha due radici reali distinte $x_0, x_1$.
Esistono due numeri $A, B$ t.c. $\dfrac{ax+b}{x^2+px+q} = \dfrac{A}{x-x_0} + \dfrac{B}{x-x_1}$ e allora l'integrale diventa facile!

$\boxed{\text{Ex}}$ $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^2-x-2}\,dx$ In questo caso $\Delta>0$: radici sono $x_0=-1$, $x_1=2$

$$\frac{3x+5}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{Ax-2A+Bx+B}{(x+1)(x-2)} = \frac{(A+B)x+(B-2A)}{(x+1)(x-2)}$$

$$\iff \begin{cases} A+B=3 \\ B-2A=5 \end{cases} \quad \begin{cases} B=3-A \\ 3-A-2A=5 \end{cases} \quad A=-2/3 \quad B=11/3$$

$$\int \frac{3x+5}{x^2-x-2}\,dx = \int\left(\frac{-2/3}{x+1}+\frac{11/3}{x-2}\right)dx = -\frac{2}{3}\int\frac{1}{x+1}\,dx + \frac{11}{3}\int\frac{1}{x-2}\,dx$$

$$= -2/3 \log|x+1| + 11/3 \log|x-2| + K$$

II° caso: $\Delta=0$ ovvero il denominatore è un quadrato perfetto $x^2+px+q=(x-\alpha)^2$.
In tal caso basta porre $x-\alpha=t$ e l'integrale diventa facile.

$\boxed{\text{Ex}}$ $\displaystyle\int \frac{x^3+x}{x^2+2x+1}\,dx$ Bisogna innanzi dividere.

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & & +x & & x^2+2x+1 \\ \hline -x^3 & -2x^2 & -x & & x-2 \\ // & -2x^2 & & & \\ & +2x^2 & +4x & +2 & \\ \hline & // & 4x & +2 & \end{array}$$

$$= \int\frac{(x^2+2x+1)(x-2)+2(2x+1)}{x^2+2x+1}\,dx$$

$$= \int(x-2)\,dx + 2\int\frac{2x+1}{x^2+2x+1}\,dx$$

$$= x^2/2 - 2x + 2\int\frac{2x+1}{x^2+2x+1}\,dx$$ mi occupo di questo

Visto che $x^2+2x+1=(x+1)^2$ pongo $x+1=t$ $x=t-1$ $dx=dt$

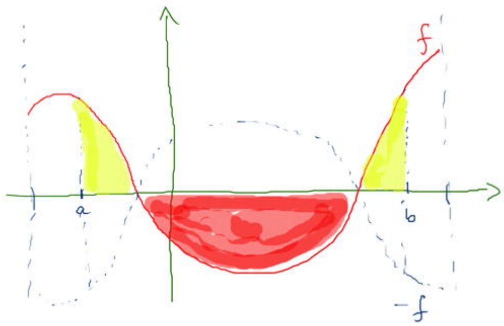
$$\int\frac{2t-2+1}{t^2}\,dt = \int\frac{2t-1}{t^2}\,dt = \int\left(\frac{2}{t}-\frac{1}{t^2}\right)dt = 2\log|t| - \frac{t^{-1}}{-1} + K$$

$$= 2\log|t| + \frac{1}{t} + K = 2\log|x+1| + \frac{1}{x+1} + K$$

Dunque $\displaystyle\int\frac{x^3+x}{x^2+2x+1}\,dx = x^2/2 - 2x + 4\log|x+1| + \frac{2}{x+1} + K$

Facendo una piccola pausa nel calcolo delle primitive (ovvero: l'integrazione nel primo senso), parliamo ora del calcolo delle aree sottese dai grafici di funzioni continue (ovvero l'integrazione nel secondo senso).

Sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua su un intervallo $A \subseteq \mathbb{R}$

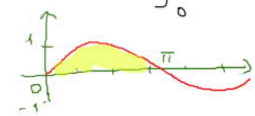



Dati $a, b \in A$ con $a \le b$, definiamo il simbolo $\int_a^b f(x)\,dx$ come l'area sottesa tra il grafico di $f$ e l'asse $x$, intendendo come $\frac{\text{positiva}}{\text{negativa}}$ l'area nelle zone in cui $f \gtrless 0$

Pertanto $\int_a^b (-f(x))\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

Inoltre, se $a > b$ definiamo $\int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx$

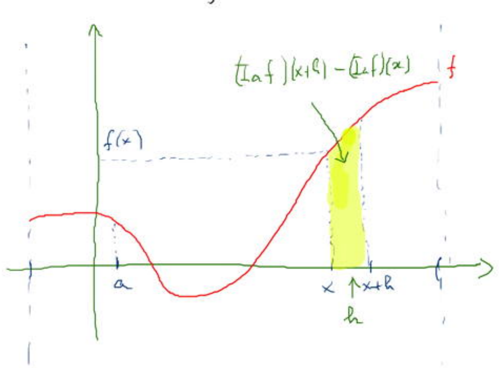
$\boxed{\text{Es.}}$ $\int_\pi^0 \sin x\,dx = -\int_0^\pi \sin x\,dx$




Con questa definizione, se $c$ è un altro punto di $A$ vale

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$

Sia data $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, ove $A$ intervallo




Fissiamo un qualsiasi punto $a \in A$

Facendo $\int_a^x f(t)\,dt$ otteniamo un valore che ovviamente dipende da $x$: in altre parole costruiamo una nuova funzione

$I_af : A \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad (I_af)(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

Ebbene: $\underline{I_af \text{ è una primitiva di } f}$ ovvero $I_af$ è derivabile, e la sua derivata è proprio $f$.

Infatti $(I_af)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(I_af)(x+h) - (I_af)(x)}{h} = f(x)$

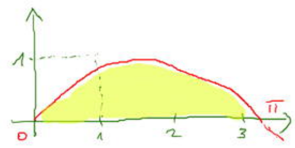
Una conseguenza fondamentale è il TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO:

$$\boxed{\text{Se } f: A \to \mathbb{R} \text{ è continua su un intervallo } A \subseteq \mathbb{R} \text{ e } F \text{ è una sua qualsiasi primitiva, allora } \forall a,b \in A \text{ vale } \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

Dim. Di certo avremo che $F(x) = (I_af)(x) + K$ per una certa costante $K \in \mathbb{R}$

Dunque $F(b) - F(a) = (I_af)(b) + \cancel{K} - \underbrace{(I_af)(a)}_{0} - \cancel{K} = \int_a^b f(x)\,dx$. $\square$

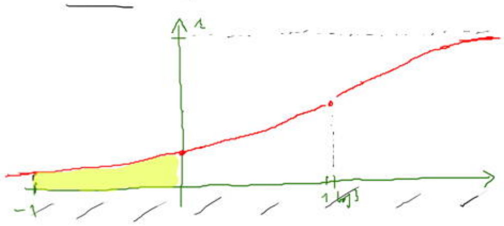
$\boxed{\text{Es.}}$ $f(x) = \sin x$ $\quad A = [0, \pi]$




Una primitiva di $f(x)$ è $F(x) = -\cos x$

Allora $\displaystyle\int_0^\pi \sin x \, dx = F(\pi) - F(0) = (-\cos x)(\pi) - (-\cos x)(0) = 1 - (-1) = 2$

Esercizi || Studiare l'andamento della funzione $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+3}$ e calcolare $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$




Dominio: $\mathbb{R}$ zeri: $f(x) = 0$ mai segno: $f(x) > 0$ sempre

$f(0) = 1/4$ $\quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^+$ $\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

D'altra parte $f(x) < 1$ (perché $e^x < e^x + 3$) $\Rightarrow f$ tende a 1 da sotto.

$f'(x) = \dfrac{e^x(e^x+3) - e^x \cdot e^x}{(e^x+3)^2} = \dfrac{3e^x}{(e^x+3)^2} > 0 \Rightarrow f$ strett. crescente.

$f(-1) = \dfrac{1/e}{1/e+3} = \dfrac{1}{e} \cdot \dfrac{e}{3+e} = \dfrac{1}{3+e} \sim 0{,}18$ $\quad f'(0) = 3/16$

$f''(x) = 3\,\dfrac{e^x \cdot (e^x+3)^{\cancel{2}} - e^x \cdot 2e^x \cancel{(e^x+3)}}{(e^x+3)^{\cancel{4}\,3}} = 3e^x\,\dfrac{e^x+3-2e^x}{(e^x+3)^3} = 3e^x\,\dfrac{3-e^x}{(e^x+3)^3}$ $\quad f''(x) = 0$ per $e^x = 3$ cioè $x = \log 3 \sim 1{,}1$

$f(\log 3) = 1/2$ $\quad f'(\log 3) = 1/4$ $\quad f''(x) > 0$ per $x < \log 3$

$\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{e^x}{e^x+3}\,dx = \Big(\underbrace{\log(e^x+3)}_{F(x)}\Big]_{-1}^{0} = F(0) - F(-1) = \log 4 - \log\left(3 + \frac{1}{e}\right) = \log 4 - \log\left(\frac{3e+1}{e}\right) = \log\left(\frac{4e}{3e+1}\right)$ $\sim 1{,}2$

Esercizi per la prossima volta:

Date le seguenti funzioni, studiarne l'andamento e provare a effettuare dei calcoli di aree, verificando l'attendibilità del risultato

$$\frac{x^2}{3x-1}, \quad \frac{3x+1}{x^2-x}, \quad \frac{\sin 2x}{5-\sin^2 x}, \quad \frac{\sqrt{1+\log x}}{x}, \quad \frac{x^3}{9-x^2}$$