

$$Z_{dR}^k(\mathbb{R}^n) := \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}\text{-forme chiuse su } \mathbb{R}^n \\ \omega = 0 \end{array} \right\} \quad \mathbb{R} \geq 0$$

$$B_{dR}^k(\mathbb{R}^n) := \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}\text{-forme esatte su } \mathbb{R}^n \\ \omega = d\alpha \quad \alpha \in \Delta^{k-1} \end{array} \right\} \quad \mathbb{R} \geq 1$$

Sp. vett. di dim. infinita.

dR: di Rham

$$B_{dR}^k \subseteq Z_{dR}^k \quad (\text{chiaro da } d^2 = 0)$$

$$d(d\alpha) = 0$$

$$H_{dR}^k(\mathbb{R}^n) := \frac{Z_{dR}^k(\mathbb{R}^n)}{B_{dR}^k(\mathbb{R}^n)} = [w] = [w + d\alpha]$$

★ spazio vettoriale quoziente

[le def. sono generali]
 coomologia

$$w_1 \sim w_2 \iff w_1 - w_2 \in d\Delta^{k-1}$$

$$\mathbb{R}^k \quad \mathbb{R}^k$$

\mathbb{R} -gruppo di
coomologia di de Rham
 de Rham cohomology group

osserviamo subito che $H^0(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}$

⇒ una 0-forma è un f. liscia, f.

$df = 0 \implies f$ costante, da cui l'asserto.
 (\mathbb{R}^n è connesso...)

★ Complesso di de Rham

$$\dots \xrightarrow{d} \Delta^{\mathbb{R}^{k-1}} \xrightarrow{d_{k-1}} \Delta^{\mathbb{R}^k} \xrightarrow{d_k} \Delta^{\mathbb{R}^{k+1}} \rightarrow \dots$$

$$d_k \circ d_{k-1} = 0 \quad \text{Im } d_{k-1} \subseteq \text{Ker } d_k$$



Lemma di Poincaré

$$H_{dR}^k(\mathbb{R}^n) = 0 \quad n \geq 1$$

per $k > 0$

Dim:

costruiamo

$$h_j: \Lambda^{j+1} \rightarrow \Lambda^j$$

lineari

tale che

$$(*) \quad h_k \circ d + d \circ h_{k-1} = \text{id}_{\Lambda^k}$$

$$H^0(\mathbb{R}^n) = \dots = \{ \text{costanti} \}$$
$$\Rightarrow \cong \mathbb{R}$$

$\{h_j\}$: operatore
di
omotopia
homotopy
operator

$k > 0$

$$\dots \rightarrow \Lambda^{k-1} \xrightarrow{d} \Lambda^k \xrightarrow{d} \Lambda^{k+1}$$

h_{k-1} h_k

Trovata $\{h_j\}$, è subito, se $d\omega = 0$
($\omega \in \Lambda^k$), ω chiusa
closed

$$h_k d\omega + d(h_{k-1}\omega) = \omega$$

\parallel
0

Λ^{k-1}

i.e. $\omega = d(h_{k-1}\omega) \Rightarrow \omega$ è esatta
exact

⚠ Formule del tipo (*) sono importanti anche in
topologia algebrica. Nota: la dim. vale per
un aperto stellato (star-shaped)



Def. h_{k-1} su $\omega = g dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$

(cio' e' sufficiente)

$$h_{k-1}(\omega)(x) := \left(\int_0^1 t^{k-1} g(tx) dt \right) \mu$$

con $\mu = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} x_{i_j} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge dx_{i_k}$

(osservare che $d\mu = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge dx_{i_k} = \sum dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = k dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$)

① calcoliamo $\omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$

$(dh_{k-1})(\omega)(x) = \mu = x_1 dx_2 \wedge dx_3 - x_2 dx_1 \wedge dx_3 + x_3 dx_1 \wedge dx_2$

$d \left[\left(\int_0^1 t^{k-1} g(tx) dt \right) \mu \right] = d\mu = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2$

$= \sum_{j=1}^m \left[\int_0^1 t^{k-1} \cdot t \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j}(tx) dt \right] dx_j \wedge \mu = 3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$

$+ \left(\int_0^1 t^{k-1} g(tx) dt \right) d\mu = \sum_{j=1}^m \left[\int_0^1 t^{k-1} \frac{\partial g}{\partial x_j}(tx) dt \right] dx_j \wedge \mu + k \left(\int_0^1 t^{k-1} g(tx) dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

$\mu' = x_4 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - x_1 \wedge dx_4 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + x_2 \wedge dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_3 - x_3 \wedge dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_2 = x_4 \wedge (dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) -$

$+ k \left(\int_0^1 t^{k-1} g(tx) dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_4 \wedge \mu$

(*)

pag. Suddeshm

② calcolo

$$\begin{aligned}
 (h_{k-1} \circ d)(\omega)(\alpha) &= h_k \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \right] \\
 &= \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 t^{k-1} \frac{\partial g}{\partial x_j}(t\alpha) dt \right) \cdot \left[\alpha_j dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \right. \\
 &\quad \left. - dx_j \wedge \mu \right] \quad (*)
 \end{aligned}$$

① + ② $(dh_{k-1} + h_k d)(\omega) =$

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j=1}^n \left[\int_0^1 t^{k-1} \frac{\partial g}{\partial x_j}(t\alpha) dt \right] \left\{ \cancel{dx_j \wedge \mu} + \alpha_j dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \right. \\
 &\quad \left. - dx_j \wedge \mu \right\} \\
 &+ \left(k \int_0^1 t^{k-1} g(t\alpha) dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
 &= \left(\int_0^1 t^{k-1} \left[\sum_{j=1}^n \alpha_j \frac{\partial g}{\partial x_j}(t\alpha) dt \right] + \frac{dg(t\alpha)}{dt} \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
 &+ \left(\int_0^1 k t^{k-1} g(t\alpha) dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
 &= \left(\int_0^1 \left(t^{k-1} \frac{dg}{dt} + k t^{k-1} g \right) dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \underbrace{g(\alpha)}_{\text{III}} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
 &\quad \underbrace{\int_0^1 \frac{d(t^k g)}{dt} dt}_{\text{II}} = \underbrace{1 \cdot g(\alpha)}_{\text{I}} = g(\alpha) \quad \omega
 \end{aligned}$$

$$H_c^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = n \\ 0 & k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

\uparrow coomologia a supporto compatto
 compactly supported cohomology

["dualità di Poincaré"]

A titolo di esercizio, verifichiamo che $H^1(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$
 $H^2(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{R}$

$$H^1(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$$

Sia $\omega = \alpha(x) dx$: è ovviamente chiusa.

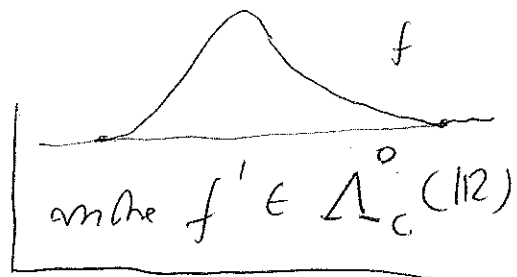
e fosse esatta, $\omega = df$ per qualche $f \in \Delta_c^0(\mathbb{R})$
 $\Rightarrow \alpha(x) = f'(x)$

\uparrow
 Supp. compatto.

ora $\int_{\mathbb{R}} \omega = \int_{\mathbb{R}} f' dx = \dots = 0$

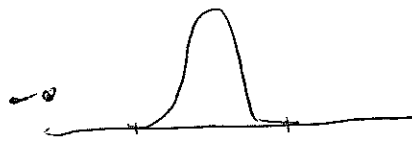
Se poi $\int_{\mathbb{R}} \omega \neq 0$

definisco $f(t) = \int_{-t}^t \omega$: è $df = \omega$



Dunque: ω è esatta $\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} \omega = 0$

Sia α scelta così:



$\Rightarrow \omega = \alpha(x) dx$
non è esatta.

con $\int_{\mathbb{R}} \alpha = 1$

bump ϵ -form
classico

ω_1, ω_2 sono coomologhe \Leftrightarrow

$$\int \omega_1 = \int \omega_2$$

per tanto l'applicazione

$$H_c^2(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$[\omega] \longmapsto \int_{\mathbb{R}^2} \omega$$

è un isomorfismo

Stesso ragionamento per $H_c^2(\mathbb{R}^2)$ (e in generale...)
in virtù del teorema di Green, $\omega \in \Delta_c^2(\mathbb{R}^2)$
è esatta $\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^2} \omega = 0$
 $Z_c^2(\mathbb{R}^2)$

$$\int_{\mathbb{R}^2} dx = \dots = 0$$

di nuovo

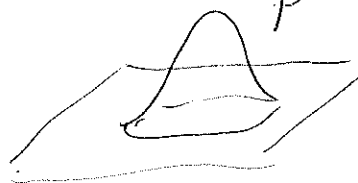
$$H_c^2(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$[\omega] \longmapsto \int_{\mathbb{R}^2} \omega$$

è un isomorfismo

moltiplichi di una bump 2-form

$$\beta \quad \omega = \beta dx dy$$



Costruzioni ausiliarie

importantissime per il seguito

★ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$



è liscia

Lemma: f è continua, si ricordi che $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/t}}{t^k} = \dots = 0$
 $k=0, 1, 2, \dots$

Per $t > 0$ $f^{(k)}(t) = \frac{P_k(t)}{t^{2k}} e^{-1/t}$ polinomio

(Induzione...)

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(k)}(t) = 0$$

$$f^{(k)}(0) = 0$$

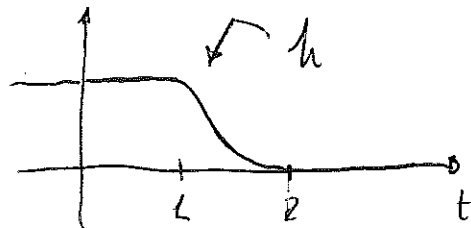
vera per $k=0$

derivate destre
 =
 derivate sinistre
 in 0

(Induzione)

$f^{(k)}$ è continua $\forall k \Rightarrow f^{(k)}$ è liscia.

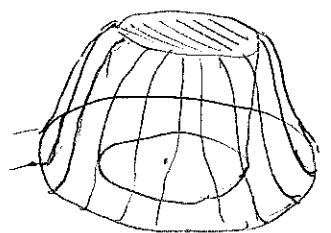
★ $h(t) := \frac{f(2-t)}{f(2-t) + f(t-1)}$



funzione di taglio
 cutoff function

★ $H = h(\|x\|)$ è tale che
 \mathbb{R}^n

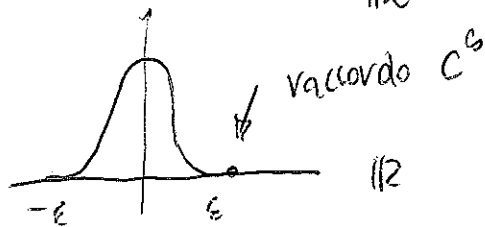
$0 \leq H(x) \leq 1$
 $H \equiv 1$ su $\overline{B}_2(0)$
 $\text{supp } H = \overline{B}_2(0)$



Altro esempio $f_\epsilon(x) = \begin{cases} C_\epsilon e^{-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - x^2}} & |x| \leq \epsilon \\ 0 & |x| \geq \epsilon \end{cases}$

C_ϵ scelta in modo che $\int_{\mathbb{R}} f_\epsilon(x) dx = 1$

"Calotte"
"candele"
"mollificatori"



in caso $f_\epsilon \rightarrow \delta$ Dirac
(i.e. nel senso delle distribuzioni)

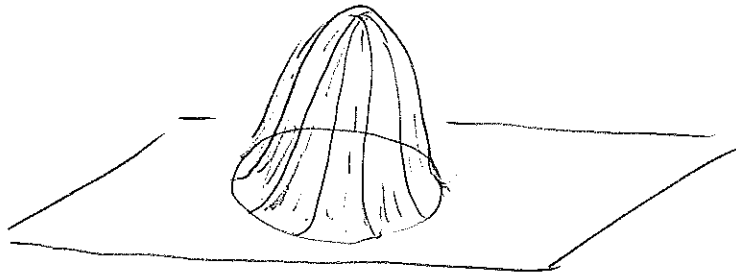
in \mathbb{R}^n $n \geq 1$

analoga...

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} C_\epsilon e^{-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - \|x\|^2}} & \|x\| \leq \epsilon \\ 0 & \|x\| \geq \epsilon \end{cases}$$

$$\|x\| \leq \epsilon$$

$$\|x\| \geq \epsilon$$



Nota: La forma angolare

Digressione
fisico-matematica

1.
$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$$

$$(x,y) \neq (0,0)$$

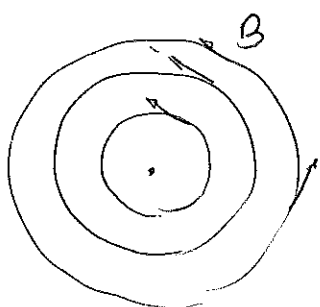
$$\omega = d\varphi$$

può essere scritta così:

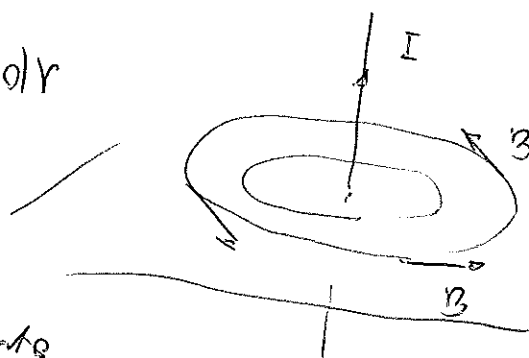
$$\omega = \frac{i \underline{r} \cdot d\underline{r}}{\|\underline{r}\|^2}$$



$\underline{r} = (x, y)$
 $d\underline{r} = (dx, dy)$



\parallel
 $\underline{B} \cdot d\underline{r}$



* ω in elemento di circolazione del campo magnetico generato da un filo rettilineo percorso da corrente (Biot-Savart)

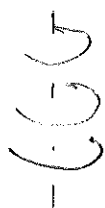
2 In meccanica dei fluidi $\underline{B} \equiv \underline{v}$ è il campo di velocità di un fluido perfetto irrotazionale ($\text{curl } \underline{v} = 0$) (su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$) con un vortice nell'origine

$\|\underline{v}\| \sim \frac{1}{r}$

[qui si utilizza che $\text{div } \underline{B} \equiv \text{div } \underline{v} = 0$]

(*)

Nota:

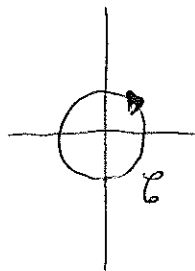


$\underline{v} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right)$

★ $H^1(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}) \cong \mathbb{R}$

Mostriamo ora solo che $\neq 0$ ($\neq \{0\}$)

$$w = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy \quad dw = 0$$



$$\int_C w = 2\pi$$

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi & r \text{ cost} \\ y = r \sin \varphi & dx = -r \sin \varphi d\varphi \\ & dy = r \cos \varphi d\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} w = [\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi] d\varphi \\ = d\varphi \end{cases}$$

se fosse $w = df$, $\int_C df = 0$

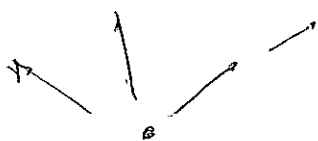
★ $H^2(\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}) \cong \mathbb{R}$

("teorema di Gauss")

Mostriamo che $\neq 0$

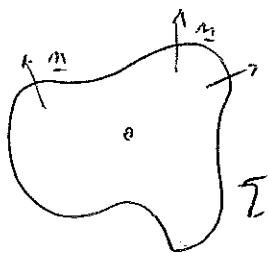
$$\begin{aligned} dw &= 0 & \operatorname{div} \underline{E} &= 0 \\ \text{su } \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} \\ (\underline{E} \text{ solenoidale}) \end{aligned}$$

$w =$ 2-forma di flusso di $\underline{E} = \frac{\underline{r}}{\|\underline{r}\|^3}$



$$\int_{\Sigma} w = \iint_{\Sigma} \underline{E} \cdot \underline{n} \, d\sigma = 4\pi$$

se $w = da$ $\underline{E} = \operatorname{curl} A$



$$\int_{\Sigma} w = \int_{\Sigma} da = \iint_{\Sigma} \operatorname{curl} A \cdot \underline{n} \, d\sigma$$

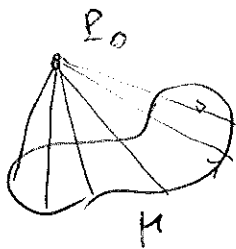
$$= \dots = 0$$

(Stokes + PWS. al limite)

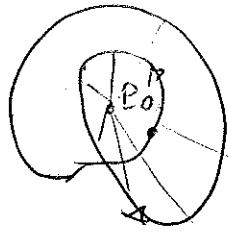
★★ Interpretazione topologica della forma angolare (df: misura di Lebesgue su S^1)

$$\text{ind}_{\mu}(P_0) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mu} \omega = m \in \mathbb{Z}$$

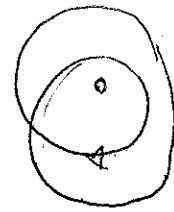
winding number
 indice di avvolgimento di μ attorno a P_0



$$\text{ind}_{\mu}(P_0) = 0$$



$$\text{ind}_{\mu}(P_0) = 2$$

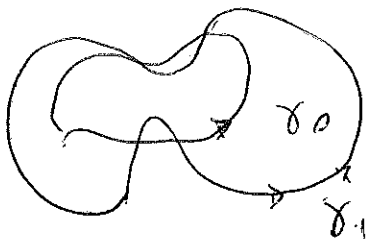


$$\text{ind}_{\mu}(P_0) = -2$$

★★ Invariante per omotopia (e per omologia...)

$$F: [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{continua}$$

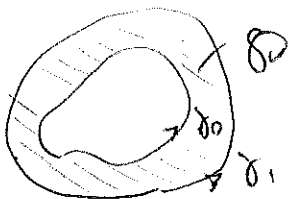
$$(t, s) \mapsto F(t, s) \equiv \gamma_t(s)$$



$$F(0, s) = \gamma_0(s)$$

$$F(1, s) = \gamma_1(s)$$

$\gamma_0 \sim \gamma_1$ γ_0 omotopa a γ_1
 (\sim è di equivalenza)



$$\gamma_1 - \gamma_2 = \partial \mathcal{D}$$

γ_1 e γ_2 omotopie

infatti $t \mapsto \text{ind}_{\gamma_t}(P_0)$ è continua e
 a valori interi \Rightarrow costante su $[0,1]$
 (connesso)