

Digressione importante

$$\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n(\mathbb{C}) \equiv \mathbb{R}(\mathbb{C}^{n+1})$$

come CW complesso

TOPOLOGIA E GEOMETRIA  
DIFFERENZIALE Prof. M. Spina  
(a.a. 2009/10)

Lezione XVI

$$\mathbb{R}^n : \left\{ [x_0 \dots x_n], \overset{\mathbb{C}^{n+1}}{\downarrow} (x_0 \dots x_n) \neq (0, 0 \dots 0) \right\}$$

$$x_n = 0 : \text{"iperpiano all'infinito"} \cong \mathbb{R}^{n-1}$$

$$\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{C}^n \quad (\text{coord: } \begin{pmatrix} x_0 & \dots & x_{n-1} \\ \cancel{x_n} \\ \cancel{x_n} \end{pmatrix})$$

in generale  $\mathbb{R}^m \setminus \mathbb{R}^{k-1} = \mathbb{C}^k$

Ora

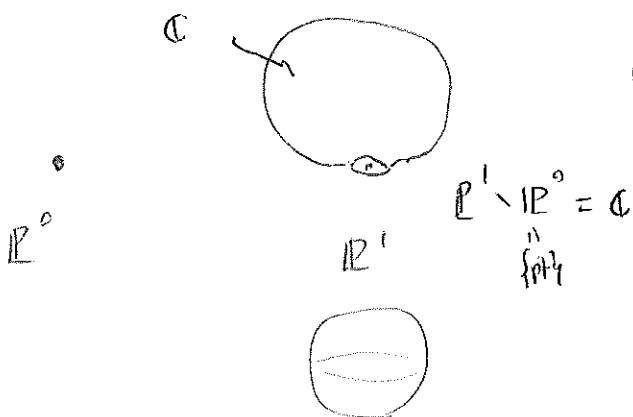
$$\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-1}) \cup \{ \mathbb{R}^{n-1} \setminus \mathbb{R}^{n-2} \} \cup \dots \cup (\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}^0) \cup \mathbb{R}^0$$

$\mathbb{C}^m \cong \mathbb{R}^{2m}$        $\mathbb{C}^{n-1} \cong \mathbb{R}^{2(n-1)}$        $\{pt\}$

$$e = \overline{\mathbb{C}^n} \cong \mathbb{R}^n$$

$$\mathbb{R}^n \sim e^n \cup e^{n-1} \cup \dots \cup e^2 \cup e^0$$

$\left. \begin{matrix} \{ \\ \} \end{matrix} \right\} 2n\text{-cella}$      
 $\left. \begin{matrix} \{ \\ \} \end{matrix} \right\} 2n-1\text{-cella}$      
 $\left. \begin{matrix} \{pt\} \\ \} \end{matrix} \right\} 0\text{-cella}$



$\mathbb{R}^n$  si ottiene attaccando  
successivamente  $n$   
celle di dim  $e, 2, \dots, 2k$   
partendo da una 0-cellula  
[La descrizione vale anche nel caso  
reale, ma l'incollamento è ivi  
più complicato]

Esercizio Sia, per  $z \in \mathbb{C}^{n+1}$

$$f(z) = \sum_{i=0}^n c_i |z_i|^2 \quad 0 < c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n$$

" "  $\| \begin{matrix} z \\ x_i^2 + y_i^2 \end{matrix} \|^2$

( $z_0, \dots, z_n$ )

mostrare che  $f$  discende ad una funzione, denotata nello stesso modo, su  $\mathbb{R}^n$ .

Determinarne i pts critici e il relativo indice...

$f$  illustra il teorema di Morse...

Sugg.  $\mathbb{R}^n \approx S^{2n+1} / S^1 \quad z \mapsto e^{i\varphi} z$

local. omogenee  $f(\bar{z}) = f(e^{i\varphi} z)$

\* i pts critici sono  
indice di  $p_k$ .

$p_i = [0, \dots, \underset{\uparrow}{1}, 0, \dots, 0]$

$f(p_k) = c_k$

Si applichi il metodo dei moltiplicatori di Lagrange a  $f = \sum c_i (x_i^2 + y_i^2)$   
 $g = (\sum x_i^2 + y_i^2) - 1$

$f(z) = c_k - c_k + \sum_{i=0}^n c_i |z_i|^2 =$

$= c_k - c_k \underbrace{\sum_{i=0}^n |z_i|^2}_1 + \sum_{i=0}^n c_i |z_i|^2$

$\nabla f = \lambda \nabla g$

$\lambda c_i x_i = \lambda x_i$   
 $c_i y_i = \lambda y_i$

$c_i z_i = \lambda z_i \Rightarrow$

$\exists k$  con  $z_k \neq 0$

$z_k = e^{i\varphi_k} + (|z_k| = 1) \wedge c_k = \lambda,$

con  $z_i = 0$

per  $i \neq k$

$$f(z) = c_{1k} + \sum_{i=0}^n (c_i - c_{1k}) |z_i|^2$$

$$= c_{1k} + \sum_{i \neq k} (c_i - c_{1k}) |z_i|^2$$

$\uparrow$   $\parallel$   $\parallel$   
 $\uparrow$   $x_i^2 + y_i^2$   $\parallel$   
 $\uparrow$   $i \neq k$

riannote come var. indep.

È l' Hessiana in  $p_{1k}$  (precisamente:  $\frac{1}{2} H$ )

$$= c_{1k} + \sum_{i \neq k} (c_i - c_{1k}) (x_i^2 + y_i^2)$$

$$c_i - c_{1k} \begin{cases} < 0 & i = 0, \dots, k-1 \\ > 0 & i = k+1, \dots, n \\ = 0 & i = k \end{cases}$$

↓

⇒ indice di  $p_{1k} = 2k$

\*  $f$  è una f. di Morse (punti critici isolati, non degeneri)

$\mathbb{R}^n$  si ottiene attaccando successivamente  $2k$ -celle ...

# \* Il nastro di Möbius

Altri esempi di varietà diff

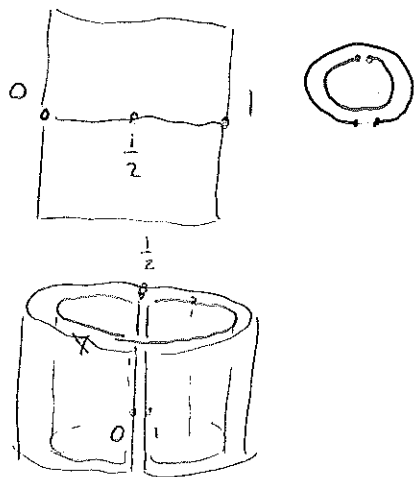
Möbius band

$$M = [0, 1] \times \mathbb{R} / \sim$$

$$(0, t) \sim (1, -t)$$

$$\bar{U}_1 = ]0, 2[ \times \mathbb{R} / \sim$$

$$\bar{U}_2 = ([0, \frac{1}{2}[ \cup ]\frac{1}{2}, 1]) \times \mathbb{R} / \sim$$



$$\phi_1 : \bar{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x, y)$$

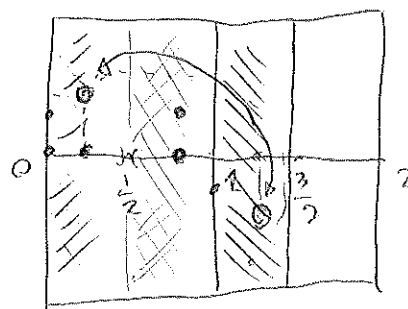
$$\phi_2 : \bar{U}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} (x, y) & x > \frac{1}{2} \\ (x+1, -y) & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$x \rightarrow \frac{1}{2}^+ \quad (\frac{1}{2}, y)$   
 $x \rightarrow \frac{1}{2}^- \quad (\frac{3}{2}, -y)$

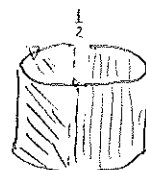
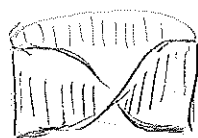
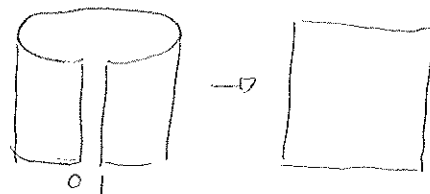
$$f = \phi_1 \circ \phi_2^{-1} : (\frac{1}{2}, 1) \cup (1, \frac{3}{2})$$

$$\rightarrow (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$$



$$f(x, y) = \begin{cases} (x, y) & x < 1 \\ (x-1, -y) & x \geq 1 \end{cases}$$

(Chiaro)



\* La bottiglia di Klein come varietà diff.

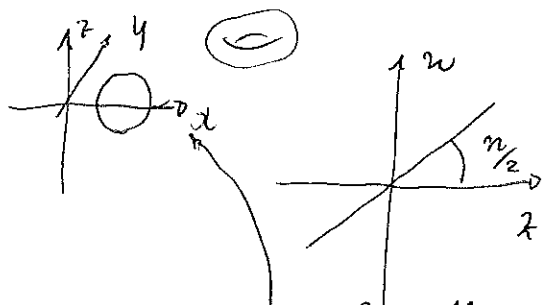
$$\bar{U}_2 = \{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u \in (0, 2\pi), v \in (0, 2\pi) \}$$

$$f_2(u, v) = \begin{cases} x = (r \cos v + a) \cos u \\ y = (r \cos v + a) \sin u \\ z = r \sin v \cos \frac{\pi}{2} \\ w = r \sin v \sin \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad a > r$$

[ nota:  $\begin{cases} x = (r \cos v + a) \cos u \\ y = (r \cos v + a) \sin u \\ z = r \sin v \end{cases}$

è una porzione di toro ordinario ]

È un toro "distorto" in  $\mathbb{R}^4$   
"twisted" torus in  $\mathbb{R}^4$



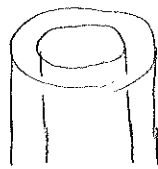
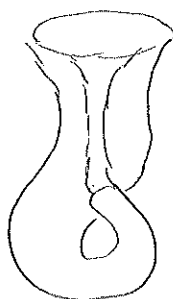
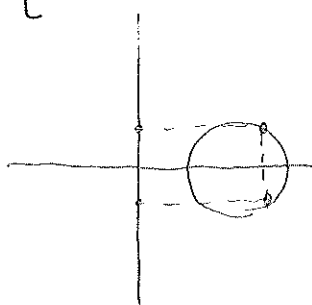
mentre ruota attorno all'asse z, subisce una ulteriore rotazione nel piano (z, w)

rotore  $P_{\pi}$   $\begin{matrix} u \mapsto u + 2\pi \\ v \mapsto v \end{matrix}$

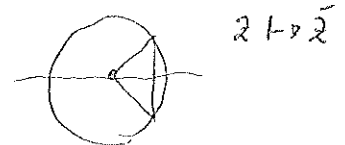
$\Rightarrow \begin{cases} x \mapsto x \\ y \mapsto y \\ z \mapsto -z \\ w \mapsto -w \end{cases}$

The circle rotates around the z-axis, with an extra rotation in the plane (z, w)

[  $v \mapsto v + 2\pi \dots$  identità ]



$$X = S^1 \times [0, 1] / \sim$$



$\begin{matrix} u \mapsto u + 4\pi \\ v \mapsto v + 2\pi \end{matrix}$

$\begin{matrix} x \mapsto x \\ w \mapsto w \end{matrix}$

$f_1$  è iniettiva:

Se  $z \neq 0$   $\sin v \neq 0$ ,  $\cos \frac{u}{2} \neq 0$

$$\frac{w}{z} = \tan \frac{u}{2} \Rightarrow \frac{w}{z} \text{ determina } u$$

$$0 < \frac{u}{2} < \pi$$

ma allora  $\sin v = \frac{w}{r \cos \frac{u}{2}}$   $\cos v = \frac{\sqrt{a^2 + y^2} - a}{r}$

$\Rightarrow$   $v$  noto anche  $u$

Se  $z=0$ ,  $v=\pi$  o  $u=\pi$ , e abbiamo ancora l'injectività

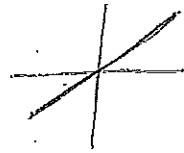
\* Cambiando l'origine di  $u$  e  $v$ , costruiamo mappe simili con cambiamenti di costante  $\alpha$  e  $\beta$

$$\left( \begin{array}{l} \text{della forma} \\ \bar{u} = \pm u + \alpha \\ \bar{v} = \pm v + \beta \end{array} \right)$$

★ Osservazioni sul concetto di struttura differenziabile

$$M_1 = (\mathbb{R}, t)$$

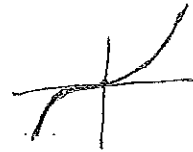
$$\varphi_1(t) = t$$



atlas

$$M_2 = (\mathbb{R}, t^3)$$

$$\varphi_2(t) = t^3$$



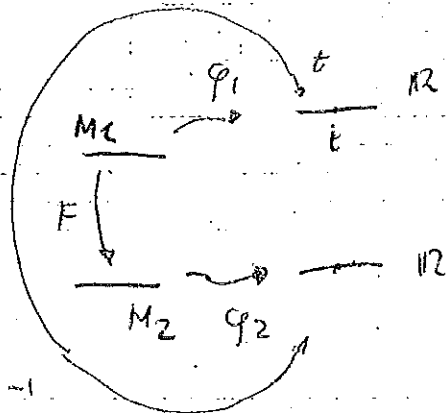
★ Iphi atlanti non sono equivalenti :  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  non sono compatibili (se chiedo  $\mathbb{R} > 0$  !)

★ Tuttavia  $M_1 \cong M_2$   
(diffeomorfismo)



$$F: M_1 \rightarrow M_2$$

$$t \mapsto \sqrt[3]{t}$$



$$\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1}$$

$$(\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1})(t) = t \quad t \mapsto t$$

$$\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1} = \text{id}$$

$$\varphi_1 \circ F^{-1} \circ \varphi_2^{-1} = \text{id}$$

$$(\varphi_1 \circ F^{-1} \circ \varphi_2^{-1})(t) =$$

$$= \varphi_1 \circ F^{-1}(\sqrt[3]{t}) = \varphi_1(t) = t \quad t \mapsto t$$

★  $\dim M \leq 3$   $\exists!$  struttura differenziabile

(Munkres, Moise)

★ spazi esotici di Milnor (Kronze-Milnor)

$S^7$  : 28 strutture diff. non equivalenti

★ In  $\dim > 3$   $\exists$   $M$  prive di struttura differenziabile

★ "fake- $\mathbb{R}^4$ " : su  $\mathbb{R}^4$   $\exists$  un insieme non numerabile di strutture differenziabili non equivalenti (Freedman)



nella "giungla" delle varietà topologiche

\* costruzione di una struttura di varietà diff su  $M$  qualsiasi (II)

$\{U_\alpha\} \quad U_\alpha \subset M$

$\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$  *iniettiva*

- (i)  $\varphi_\alpha(U_\alpha)$  aperto in  $\mathbb{R}^n$
  - (ii)  $\forall \alpha, \beta, \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  e  $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  sono aperti in  $\mathbb{R}^n$
  - (iii) se  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset, \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$
- diff. omeomorfismo

(iii)  $\bigcup_{I \subset \mathbb{Q} \text{ numerabile}} U_{i_i} = M$

(iv)  $\forall p, q \in M, p \neq q, \exists p \in U_\alpha \ni q$   
 oppure  $\exists U_\alpha, U_\beta, U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$   
 tali che  $p \in U_\alpha, q \in U_\beta$

|||  $M$  possiede una unica struttura di differenziabile tale che  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  sia una carta (locali)

Base per la topologia:  $\varphi_\alpha^{-1}(V), V \subset \mathbb{R}^n$  aperto

lo e' effettivamente:  $\forall p \in \varphi_\alpha^{-1}(V) \cap \varphi_\beta^{-1}(W), \exists \varphi_\alpha^{-1}(U) \ni p$

Sia  $U = V \cap \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(W)$ ;  $\exists \varphi_\alpha^{-1}(U) \cap \varphi_\beta^{-1}(W) = \varphi_\alpha^{-1}(U)$   
aperto in  $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  e anche in  $\mathbb{R}^n$



★ Paracompatteria (J. Dieudonné)

Uno spazio topologico  $X$  si dice paracompatto se ogni ricoprimento aperto  $\mathcal{U}$  ammette un raffinamento  $\mathcal{V}$  localmente finito

raffinamento:  
 ogni  $V \in \mathcal{V}$   
 è contenuto in un  
 $U \in \mathcal{U}$

ogni punto  $p \in X$   
 ammette  $U_p \ni p$   
 intersecante solo  
 un numero finito  
 di  $V \in \mathcal{V}$

«che concetto  
 si estende ad  
 una famiglia  
 $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ »

ovviamente  $X$  compatto  $\Rightarrow X$  paracompatto

(ma  ~~$\mathbb{R}^n$~~  :  $\mathbb{R}^n$  è paracompatto (è una varietà)  
 ma non compatto (anzi))

vale il teorema: Sia  $X$  localmente compatto, Hausdorff,  
 (i.e. ogni pto ammette un intorno a chiusura compatta)  
 a base numerabile.  
 [v. per ex n.s. Elementi di Topologia, VIII]

Allora ogni ricoprimento  $\mathcal{U}$  possiede un  
 raffinamento  $\mathcal{V}$  localmente finito, al più numerabile...

( $\Rightarrow X$  è paracompatto  $\Rightarrow$  lo sono le varietà,  
 (e anche i CW complessi))

# ★ Partizioni dell'unità

In generale: sia  $X$  uno spazio topologico.

Sia  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{O}}$  un ricoprimento aperto di  $X$

Per partizione dell'unità subordinata a  $\mathcal{U}$

si intende una famiglia di funzioni continue

$$\left\{ \psi_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R} \right\}_{\alpha \in \mathcal{O}}$$

tali che

1.  $0 \leq \psi_\alpha \leq 1 \quad (\forall \alpha \in \mathcal{O}, x \in X)$  (chiusura)

2.  $\text{supp } \psi_\alpha (= \overline{\{x \in X : \psi_\alpha(x) \neq 0\}}) \subset U_\alpha$

3. la famiglia  $\{\text{supp } \psi_\alpha\}$  è localmente finita

4.  $\sum_{\alpha \in \mathcal{O}} \psi_\alpha(x) = 1 \quad \forall x \in X$

[  $X$  di Hausdorff è paracompatto ] ogni ricoprimento  
ammette un  
ricoprimento  
localmente  
finito

$\Leftrightarrow$  ogni ricoprimento aperto  
ammette una partizione dell'unità  
a questo subordinata

il fatto che  $(\Leftarrow)$  è banale: basta prendere

$$V_\alpha = \{x \in X : \psi_\alpha(x) \neq 0\}$$

$\{V_\alpha\}$  è un ricoprimento di  $\{U_\alpha\}$ , localmente finit.

4 Sia  $M$  una varietà liscia, compatta.

Sia  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1, \dots, N}$  un atlante fruito

possiamo alterare le  $\varphi_i$  in modo che

$$\varphi_i : U_i \xrightarrow{\sim} B_1(0) \subset \mathbb{R}^m$$

omreo

★ Dato un qualsiasi ricoprimento di una varietà liscia, esso ammette una partizione dell'unità liscia a questo subordinata.

Costruiamo ★★ una partizione dell'unità liscia

su una varietà compatta, subordinata ad un atlante [ caso particolare ma istruttivo ]

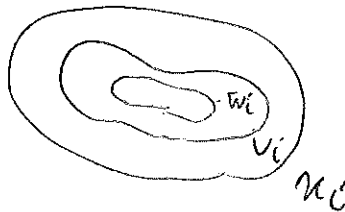
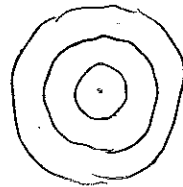
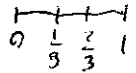


Siano  $W_i \subset V_i \subset U_i$  così definiti

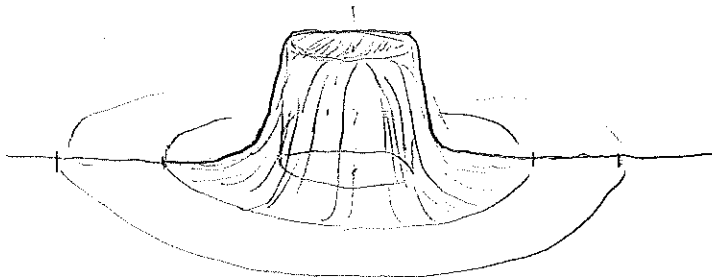
$$W_i = \varphi_i^{-1}(B_{\frac{1}{3}}(0))$$

$$V_i = \varphi_i^{-1}(B_{\frac{2}{3}}(0))$$

(sono aperti in  $M$ )



Sia  $f_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione a campana (è liscia)



Comments:  $f_i$  viene "trascinata" su  $M$

si ponga  $F_i = \varphi_i^* \circ f_i = f_i \circ \varphi_i$

$F_i$  :  $f_i$  "a campana" su  $M$   
è liscia su  $M$  per def.



Cia

$$\psi_i = \frac{F_i}{\sum_{j=0}^{\infty} F_j}$$

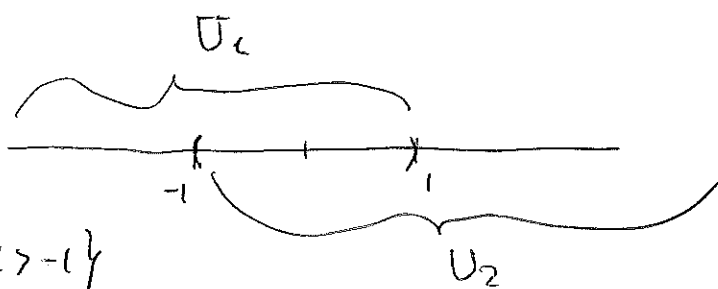
(ogni  $x \in M$  appartiene ad almeno una  $U_i$ )

$\{\psi_i\}_{i=1,2,\dots,N}$  è una partizione dell'unità  
liscia subordinata a  $\{U_i\}_{i=1,\dots,N}$

infatti  $0 \leq \psi_i \leq 1$  ,  $\text{supp } \psi_i \subset U_i$

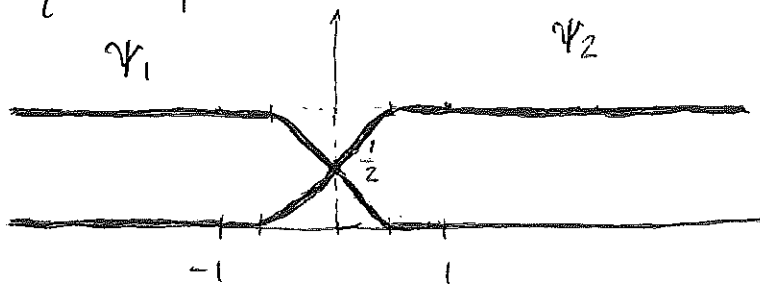
$$\text{e } \sum_i \psi_i = \sum_i \frac{F_i}{\sum_j F_j} = \frac{\sum_i F_i}{\sum_j F_j} = 1$$

Esempio.



$$U_1 = \{x > -1\}$$

$$U_2 = \{x < 1\}$$



$\{\psi_1, \psi_2\}$  part. dell'unità associata a  $\{U_1, U_2\}$