Meccanica dei fluidi

Con Fluido intendiamo sia sostanze liquide che gassose (corpi deformabili)

Nel seguito ci riferiremo ai LIQUIDI (alcune leggi si applicano anche ai gas)

Definiamo la densità come: $d = \frac{m}{V}$

Unità di misura kg/m^3 oppure g/cm^3. Unità di misura pratica kg/L.

Esempio densità dell'acqua:

$1\ Kg/L = 1Kg/dm^3 = 1kg/10^{-3}m^3 = 1000Kg/m^3$.

Pressione $P = \frac{\vec{F} \cdot \vec{n}}{\Delta S} = \frac{F_n}{\Delta S}$

Unità di misura $Pa = N/m^2$, $baria = dine/cm^2$

$1\ Pa = 1kg/(s^2 * m) = 10^3 g/(s^2 * 10^2 cm) = 10g/(s^2 * cm) = 10$ barie

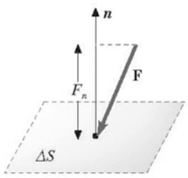


Figura 4.1
Componente $\mathbf{F}_n$ della forza $\mathbf{F}$ nella direzione $\boldsymbol{n}$ normale alla superficie ΔS.

Scannicchio
Fisica biomedica
EdiSES

Meccanica dei fluidi

Fluidi in equilibrio.

In un fluido in equilibrio sono nulle le forze tangenti alla superficie limite.
Se così non fosse gli strati superficiali scorrerebbero e si avrebbe un fluido in movimento.

La pressione che si esercita su un elemento di superficie ΔS contenente in punto P interno al fluido è indipendente dalla giacitura della superficie. Quindi si può parlare di pressione nel punto P.

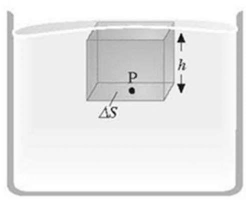


Figura 4.2
Sulla superficie ΔS agisce la forza peso del fluido sovrastante: la pressione che ne risulta è detta pressione idrostatica.

Scannicchio
Fisica biomedica
EdiSES

Meccanica dei fluidi

Fluidi in equilibrio: pressione idrostatica.

Calcoliamo la pressione esistente ad una quota h
Sotto la superficie libera di un liquido (cioè nel punto P). Consideriamo una superficie ΔS intorno al punto P.
La forza applicata sulla superficie ΔS corrisponde al peso della colonna di liquido sovrastante.

$$p = \frac{mg}{\Delta S} = \frac{d \Delta S h g}{\Delta S} = dgh$$

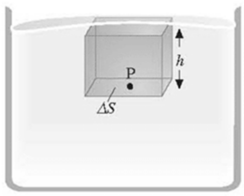


Figura 4.2
Sulla superficie ΔS agisce la forza peso del fluido sovrastante: la pressione che ne risulta è detta pressione idrostatica.

Scannicchio
Fisica biomedica
EdiSES

Meccanica dei fluidi

La pressione atmosferica è la pressione dovuta al peso della colonna d'aria sovrastante un elemento di superficie sulla superficie terrestre.

L'esperimento di Torricelli dimostrò che la pressione atmosferica a livello del mare corrisponde alla pressione esercitata da una colonnina di Hg alta 760 mm. Da qui deriviamo due unità di misura pratiche per la pressione (mmHg e atm).

1 atm =760 mmHg

Relazione tra unità di misura della pressione

1 atmosfera	$= 760\ \text{mmHg} = dgh = 13.6\ \text{g cm}^{-3}\ 980\ \text{cm s}^{-2}\ 76\ \text{cm} =$
	$= 1.012 \cdot 10^6\ \text{barie} = 1.012 \cdot 10^5\ \text{pascal} =$
	$= 1.012 \cdot 10^6 / 980\ \text{g}_{peso}\ \text{cm}^{-2} = 1033\ \text{g}_{peso}\ \text{cm}^{-2} = 0.988\ \text{bar}$
1 cmH_2O	$= dgh = 1\ \text{g cm}^{-3}\ 980\ \text{cm s}^{-2}\ 1\ \text{cm} = 980\ \text{barie} =$
	$= 980\ (760/1.012 \cdot 10^6)\ \text{mmHg} = 0.73\ \text{mmHg},$

Meccanica dei fluidi

Principio di Archimede
Se un solido viene immerso in un liquido sulla superficie del corpo si esercitano un sistema di forze dovute alla pressione idrostatica.
Immaginiamo di sostituire il corpo solido con un uguale volume di liquido (il volume di liquido sarebbe in equilibrio).
Allora dobbiamo dedurre che le forze esercitate dal fluido sul volume in questione (spinta di Archimede) bilanciano esattamente il peso del volume del liquido

➡ La spinta di Archimede vale $m_L g = d_L V g$

Meccanica dei fluidi

Spinta di Archimede

$$S_A = p_2 S - p_1 S = d g h_2 S - d g h_1 S =$$
$$d g S (h_2 - h_1) = d g S \Delta h = m g$$

Un corpo immerso in un liquido galleggia o va a fondo se la sua densità è minore o maggiore di quella del liquido.

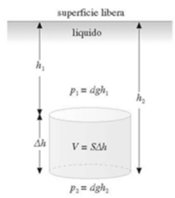


Figura 4.3
La spinta di Archimede in modulo è la conseguenza della diversa pressione idrostatica agente sulle superfici inferiore (verso l'alto) e superiore (verso il basso) del corpo di altezza Δh immerso in un liquido avente densità d:

$$S_A = p_2 S - p_1 S = dgh_2 S - dgh_1 S = dgS(h_2 - h_1) = dgS\Delta h = dgV = mg,$$

essendo m la massa di liquido spostata dal corpo. Poiché $h_2 > h_1$ la direzione di S_A è pertanto verticale verso l'alto.

Scannicchio
Fisica biomedica
EdiSES

Meccanica dei fluidi

Principio di Pascal
Se viene applicata una pressione esterna ad un fluido racchiuso in un recipiente, in ogni punto del fluido, la pressione aumenta della stessa quantità.

Esempio: Torchio idraulico (il principio vale per tutti i sistemi di trasmissione idraulica delle forze)

$$P_1 = P_2$$

$$P_1 = \frac{F_1}{A_1} \qquad P_2 = \frac{F_2}{A_2}$$

$$F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1$$

$\Rightarrow F_2 >> F_1$ Purchè $A_2 >> A_1$

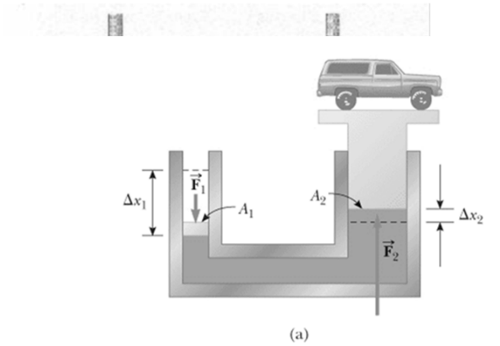


Figura 14.4 (a) Il diagramma delle forze per una pressa idr stesso sui due lati, una piccola forza $\vec{F}_1$ a sinistra produce a Un veicolo in riparazione in una officina meccanica sostenuto

Lavoro (2)$=F_2\Delta x_2=(A_2/A_1)F_1\Delta x_2=(A_1\Delta x_1/A_1)F_1=\Delta x_1 F_1=$Lavoro(1)

EdiSES

Meccanica dei fluidi

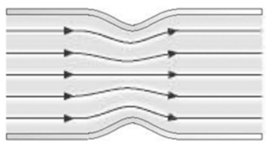


Figura 4.7
Linee di velocità in un fluido che si muove in un condotto.

Scannicchio
Fisica biomedica
EdiSES

Analogamente alle linee di forza si possono considerare le linee di velocità o linee di corrente (linee a cui la v è sempre tangente).

Moto stazionario

Portata di un condotto: il volume di fluido che attraversa la sezione S del condotto nell'unità di tempo.

$$Q = \frac{V}{\Delta t}$$

Unità di misura della portata m^3/s.
Unità di misura pratiche: cm^3/s; L/min; L/s.

EdiSES

Meccanica dei fluidi

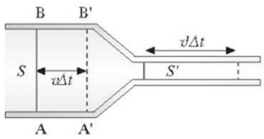


Figura 4.8
La diminuzione di sezione in un condotto rigido, per la continuità del flusso, comporta un aumento della velocità media v del liquido.

Scannicchio
Fisica biomedica
EdiSES

La portata può essere espressa in funzione della velocità di flusso.

$$Q = \frac{V}{\Delta t} = \frac{S v \Delta t}{\Delta t} = S v$$

Equazione di continuità
(moto stazionario, condotto non deformabile, fluido incomprimibile)

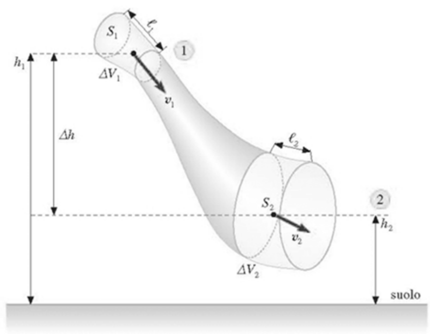
$$S v = S' v'$$

$$\boxed{S v = cost}$$

Meccanica dei fluidi

Teorema di Bernoulli: applicazione del teorema del lavoro e dell'energia cinetica al moto del fluido

Figura 4.11
La massa di liquido in posizione 1 si sposta nel condotto rigido fino alla posizione 2. In condizione di regime stazionario $\Delta V = S_1 \ell_1 = S_2 \ell_2$. Sul liquido agiscono le forze di pressione e la forza di gravità (forza peso). Le forze di pressione sono ortogonali alle sezioni del condotto.



Scannicchio
Fisica biomedica
EdiSES

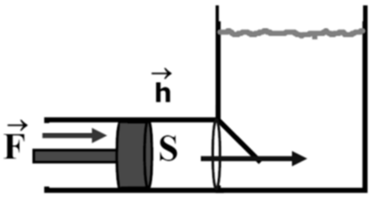
Meccanica dei fluidi

Lavoro della pressione:

$$\boxed{p = \frac{F}{S} \longrightarrow F = p \cdot S}$$

Lavoro compiuto dalla forza di pressione:

$$L = \vec{F} \cdot \vec{h} = F\,h = p\,S\,l = p\,\Delta V$$



EdiSES

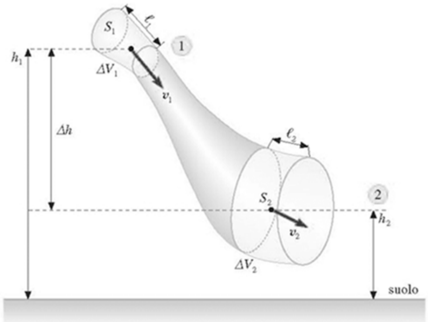
Meccanica dei fluidi

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = S v = cost$$

$$Q = \frac{S_1 l_1}{\Delta t} = \frac{S_2 l_2}{\Delta t}$$

$$S_1 l_1 = S_2 l_2$$

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$$



EdiSES

Meccanica dei fluidi

$$\boxed{L = \Delta E_K}$$

$$\underbrace{-mg(h_2-h_1)}_{\text{Lavoro della forza peso}} + \underbrace{S_1 p_1 l_1}_{p_1\Delta V} - \underbrace{S_2 p_2 l_2}_{p_2\Delta V} = \Delta E_K$$

$$\Delta E_K = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$mgh_1 - mgh_2 + S_1 p_1 l_1 - S_2 p_2 l_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$mgh_1 + S_1 p_1 l_1 + \frac{1}{2} m v_1^2 = mgh_2 + S_2 p_2 l_2 + \frac{1}{2} m v_2^2$$

Dividendo per ΔV e utilizzando $d=m/\Delta V$

$$dgh_1 + \frac{1}{2} d v_1^2 + p_1 = dgh_2 + \frac{1}{2} d v_2^2 + p_2$$

Se il fluido è in equilibrio, il teorema di Bernoulli si riduce alla pressione idrostatica.

EdiSES

Meccanica dei fluidi

$$\boxed{dgh + p + \frac{1}{2} d v^2 = \text{cost}}$$

Energia per unità di volume rimane costante nel moto di un fluido.

$$\boxed{h + \frac{p}{dg} + \frac{v^2}{2g} = \text{cost}}$$

Somma tra altezza geometrica, altezza piezometrica e altezza d'arresto rimane costante nel moto stazionario di un fluido ideale (non abbiamo considerato l'attrito).

EdiSES

Meccanica dei fluidi

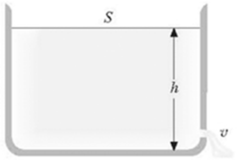


Figura 4.12
Recipiente con un foro posto a quota h sotto il livello del liquido.

Scannicchio
Fisica biomedica
EdiSES

Teorema di Torricelli (applicazione del teorema di Bernoulli)

Se in un recipiente contenente un liquido si pratica un foro di dimensioni molto piccole rispetto alla sezione del recipiente, a una profondità h dalla superficie libera del liquido, la velocità con cui il liquido fuoriesce è data da:

$$v = \sqrt{2hg}. \tag{6.17}$$

Caduta libera

$Sv_0 = sv$
Siccome $S >> s$, v_0 è trascurabile rispetto a v. Inoltre entrambe le superfici sono a p_0.

$$h + \frac{p_0}{dg} = \frac{p_0}{dg} + \frac{v^2}{2g}, \Rightarrow v = \sqrt{2hg}$$

Meccanica dei fluidi

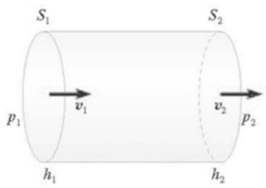


Figura 4.13
Condotto orizzontale di sezione costante, per cui $h_1 = h_2$ e $v_1 = v_2$: la conseguenza è $p_1 = p_2$.

Fluido ideale (no attrito) in moto in un condotto orizzontale a sezione costante.

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \Rightarrow v_1 = v_2$$

$$p_1 + \frac{1}{2} d v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} d v_2^2 \Rightarrow p_1 = p_2$$

Se la v è costante anche la p è costante. Un fluido ideale può attraversare un condotto orizzontale (con portata costante) senza che ci sia tra gli estremi del condotto una differenza di pressione.

Si vede sperimentalmente che una frazione di energia viene dissipata per vincere l'attrito. Se E_A è l'energia per unità di volume dissipata per attrito nel tratto compreso tra S_1 e S_2 allora il teorema di Bernoulli viene corretto in questo modo:

$$dgh_1 + \frac{1}{2} d v_1^2 + p_1 = dgh_2 + \frac{1}{2} d v_2^2 + p_2 + E_A \qquad p_1 = p_2 + E_A$$

$$p_1 - p_2 = E_A$$

Per far scorrere lungo un condotto un fluido (reale) con v=cost occorre applicare una differenza di pressione agli estremi del condotto.

Meccanica dei fluidi

Se non venisse applicata questa differenza di pressione ai capi del condotto, le forze di attrito frenerebbero il fluido (diminuzione di velocità) e avremmo una diminuzione di portata. Per ottenere una portata Q in un fluido reale occorre applicare una differenza di pressione proporzionale alla portata che si vuole ottenere.

Si definisce la resistenza del condotto R : $\Delta P = RQ$ $\qquad R = \frac{\Delta P}{Q}$

Nel moto di un fluido reale si distinguono due regimi: laminare e turbolento.

Laminare: quando il fluido si muove a strati (lamine).
In questo caso si trova sperimentalmente che la forza di attrito tra le lamine vale:

$$\vec{F}_A = -\eta A \frac{\vec{v}}{\delta}$$

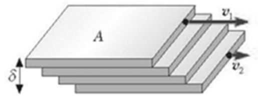


Figura 4.14
Lamine di liquido di superficie A, poste a distanza δ, che scorrono con velocità *relativa* $v = v_1 - v_2$.

η= coefficiente di viscosità del fluido; unità di misura poise=g*cm^{-1}*s^{-1}.

EdiSES

Meccanica dei fluidi

Sperimentalmente si può verificare che $R \propto \frac{\eta l}{r^4}$ E precisamente $R = \frac{8}{\pi}\frac{\eta l}{r^4}$

$$\boxed{Q = \frac{\pi r^4}{8\eta l}\Delta p} \qquad \boxed{\Delta p = \frac{8\eta l}{\pi r^4} Q}$$

Legge di Hagen Poiseuille

Analogia con la legge di Ohm

Se aumentando Δp aumentiamo v, si raggiunge una velocità critica al di sopra della quale si passa a regime turbolento. La formula di Hagen Poiseuille non vale più.

Profilo parabolico

a) profilo di velocità in regime laminare
b) linee di velocità in regime turbolento

$$v_c = R_e \frac{\eta}{d r}$$

R_e costante detta numero di Reynolds, d=densità, r=raggio condotto.

EdiSES

Meccanica dei fluidi

Quando si passa in regime turbolento aumenta la resistenza del condotto (perché molta energia viene dissipata per attrito). La resistenza è proporzionale alla portata:

$$R = kQ$$

Che unita alla definizione di resistenza idrodinamica:

$$R = \frac{\Delta p}{Q}$$

$$\frac{\Delta p}{Q} = kQ$$

$$Q \propto \sqrt{\Delta P}$$

Riassumendo:

Laminare: $Q \propto \Delta P$ Per raddoppiare la portata occorre raddoppiare la pressione

Turbolento: $Q \propto \sqrt{\Delta P}$ Per raddoppiare la portata occorre quadruplicare la pressione

EdiSES

Meccanica dei fluidi

Esempio: tubi ad U riempiti di due fluidi immiscibili. In un solo caso i fluidi non possono essere in equilibrio statico. In quale caso?

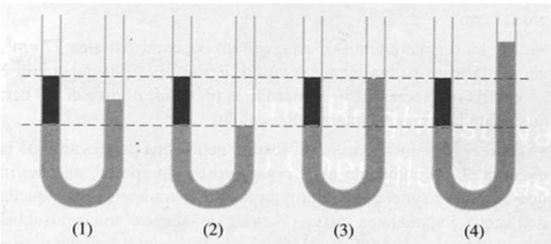


Figura 14.23 Quesito 3.

Negli altri casi, come è la densità del fluido rosso (dr) rispetto a quello grigio (dg)?

EdiSES

Meccanica dei fluidi

Esempio: Una arteria di raggio r=2.5 mm ed è parzialmente bloccata da una placca. Nella regione ostruita il raggio effettivo è 1.8 mm e la velocità del sangue $50 cms^{-1}$. Calcolare la velocità media del sangue nella regione non ostruita. Sapendo che la densità del sangue vale 1.04 g/cm^{-3}, calcolare la differenza di pressione tra la zona ostruita e quella non ostruita (si assuma l'arteria in posizione orizzontale).

Indichiamo con l'indice 1 la regione non ostruita e con indice 2 quella ostruita.

Equazione di continuità $v_1=(S_2/S_1)v_2=(r_2^2/r_1^2)v_2=(1.8/2.5)^2 v_2=25.9cm/s$

Bernoulli: $(1/2)dv_1^2+p_1=(1/2)dv_2^2+p_2$

$p1-p2=(1/2)d(v_2^2-v_1^2)=951$ barie

951 barie=95.1 Pa=0.85 mmHg