Foglio 9

Consegna giovedì 11 dicembre 2014

Esercizio 1 (Punti 6). Si consideri il sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^4$ $A =< (-1, 0, 0, i)^T,\ (1, 0, i, 1)^T,\ (0, 0, i, 1{+}i)^T,\ (0, 1, 0, 1)^T >$.

1. Determinare una base ortogonale di A.
2. A coincide con $\mathbb{C}^4$? In caso negativo completare la base prima ottenuta per A ad una base ortonormale di $\mathbb{C}^4$.
3. Si trovi la proiezione ortogonale su A di $(1, 0, -1, 2)^T$

Esercizio 2 (Punti 8). Si consideri il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ $V =< (-1, 0, 1)^T,\ (1, 1, 0)^T,\ (1, 2, 1)^T >$

1. Determinare una base ortogonale di V.
2. Completare la base prima ottenuta per V ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.
3. Trovare la matrice della proiezione ortogonale su V e su $V^\perp$.
4. Sia $v = (1, 0, -1)^T$. Si calcoli $P_V(v)$ e $P_{V^\perp}(v)$.
5. Sia $v = (2, 0, -1)^T$. Si calcoli $P_V(v)$ e $P_{V^\perp}(v)$.

Esercizio 3 (Punti 8).

1. Dimostrare che la seguente applicazione definisce un prodotto scalare in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{v}, \vec{w}) &\longmapsto \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle := (3v_1 + v_3)w_1 + 4v_2w_2 + (v_1 + 3v_3)w_3 \ . \end{aligned}$$

2. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato da $[1 \quad 0 \quad 1]^T$ e $[1 \quad 0 \quad -1]^T$. Determinare una base ortonormale di W.
3. Determinare il complemento ortogonale $W^\perp$ di W rispetto al prodotto scalare definito al punto precedente.

Esercizio 4 (Punti 8).

1. Determinare autovalori e autovetori di

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1-i \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. A è simile ad una matrice diagonale? Se si, a quale matrice diagonale?
3. Determinare, se esiste, una base ortonormale di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori per A.
4. Trovare il complemento ortogonale di $N(A)$