

Matematica e Statistica

Prova d'Esame (10/09/2010)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2009/10

Matematica e Statistica

Prova d'Esame di MATEMATICA (10/09/2010)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2009/10

Cognome-Nome _____ Matr. _____

IN STAMPATELLO

- (1) Il piano Π passa per il punto $P(1, -2, 3)$ ed è ortogonale al vettore $\vec{u} = (2, 0, -1)$, mentre la retta r passa per P ed è parallela a \vec{u} : trovare forma parametrica e cartesiana sia di Π che di r . Trovare poi tutti i punti di Π e di r la cui distanza da P è 4.
- (2) Studiare l'andamento⁽¹⁾ di $f(x) = \log(x + \sqrt{|x|})$, e tracciarne il grafico.
- (3) (a) Calcolare $\int_0^1 \frac{e^{2x} - 4e^x + 6}{3 - e^x} dx$.
- (b) Disegnare $S = \{(x, y) : |x + y| \leq x, y \geq x^2 - 3\}$, e calcolarne l'area.
- (4) (a) Data $g(x, y) = \frac{3xy - 1}{x + 3}$, determinarne dominio, zeri, segno e limiti interessanti, disegnando i risultati. Trovarne i punti stazionari ed eventuali punti di massimo e minimo locale.
- (b) Determinare massimo e minimo assoluti di g sui punti del triangolo T (chiuso, lati compresi) di vertici l'origine $O(0, 0)$ e i punti $A(1, 0)$ e $B(0, 1)$.
- (5) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y'' - y' - 2y = 4x^2$ e tutte quelle dell'equazione differenziale $(1 + x^2)y' = xy$ che in $x = 0$ hanno un punto di minimo locale.

⁽¹⁾Non si richiede lo studio della convessità.

Matematica e Statistica

Prova d'Esame di **STATISTICA** (10/09/2010)
Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2009/10

Cognome-Nome _____ Matr. _____

IN STAMPATELLO

Per ogni calcolo effettuato scrivere anche la formula teorica da utilizzare.

▶▶▶▶ Tabella sul retro ▶▶▶▶

ESERCIZIO 1

Su un campione di 200 soluzioni acquose è stato condotto uno studio volto ad analizzarne il livello di acidità.

Sono state così rilevate le seguenti frequenze sulle classi di pH:

Livello di acidità	Classe di pH	f
Molto acida	0 - 2	55
Acida	2 - 4	48
Leggermente acida	4 - 6	34
Neutra o Basica	6 - 14	63

Sulle classi di pH esposte in tabella:

- (a) calcolare la media aritmetica, la media armonica e la media geometrica;
- (b) disegnare il grafico della distribuzione di frequenze;
- (c) calcolare la mediana e la moda.

ESERCIZIO 2

Sulla distribuzione di frequenze della tabella precedente, calcolare:

- a) la varianza;
- b) lo scarto quadratico medio;
- c) il coefficiente di variazione;
- d) il campo di variazione e il range relativo alla media.

ESERCIZIO 3

Nell'ambito di una ricerca condotta sul gruppo sanguigno di 100 persone sono state osservate le seguenti frequenze:

Gruppo sanguigno	Frequenza
A	30
B	20
AB	15
0	35

Sulla base dei risultati presentati nella tabella soprastante, si può considerare valida l'ipotesi di distribuzione uniforme delle frequenze dei gruppi sanguigni (ad un livello di significatività del 2,5%)?

Allegato: Tabella "Chi Quadrato"

Valori della variabile "Chi Quadrato" che sottendono una coda destra di ammontare alpha

G.d.l.	alpha %							
	99,5	99	97,5	95	5	2,5	1	0,5
1	0,00	0,00	0,00	0,00	3,84	5,02	6,64	7,88
2	0,01	0,02	0,05	0,10	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,07	0,12	0,22	0,35	7,82	9,35	11,35	12,84
4	0,21	0,30	0,48	0,71	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,41	0,55	0,83	1,15	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,68	0,87	1,24	1,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,99	1,24	1,69	2,17	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	15,51	17,54	20,09	21,96
9	1,74	2,09	2,70	3,33	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,94	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,60	3,05	3,82	4,58	19,68	21,92	24,73	26,76
12	3,07	3,57	4,40	5,23	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,57	4,11	5,01	5,89	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,08	4,66	5,63	6,57	23,69	26,12	29,14	31,32
15	4,60	5,23	6,26	7,26	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,14	5,81	6,91	7,96	26,30	28,85	32,00	34,27
17	5,70	6,41	7,56	8,67	27,59	30,19	33,41	35,72
18	6,27	7,02	8,23	9,39	28,87	31,53	34,81	37,16
19	6,84	7,63	8,91	10,12	30,14	32,85	36,19	38,58
20	7,43	8,26	9,59	10,85	31,41	34,17	37,57	40,00

Allegato: Tabella "t di Student"

Valori della "t di Student" che sottendono una coda destra di ammontare alpha

G.d.l. ν	α				
	5%	2,5%	1%	0,5%	0,1%
1	6,314	12,706	31,821	63,657	318,310
2	2,920	4,303	6,965	9,925	22,327
3	2,353	3,182	4,541	5,841	10,215
4	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173
5	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893
6	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
7	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785
8	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501
9	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297
10	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144
11	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025
12	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930
13	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852
14	1,761	2,145	2,624	2,997	3,787
15	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733
16	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686
17	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646
18	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610
19	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579
20	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552

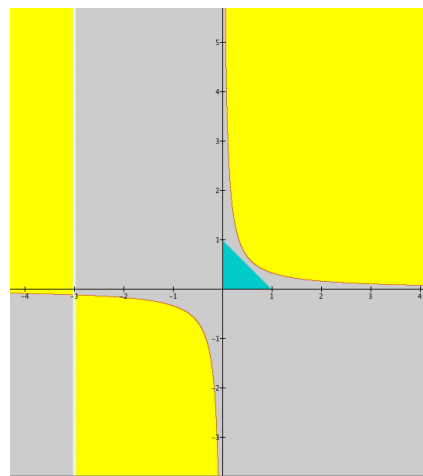
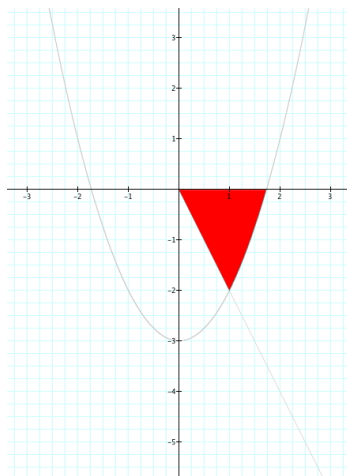
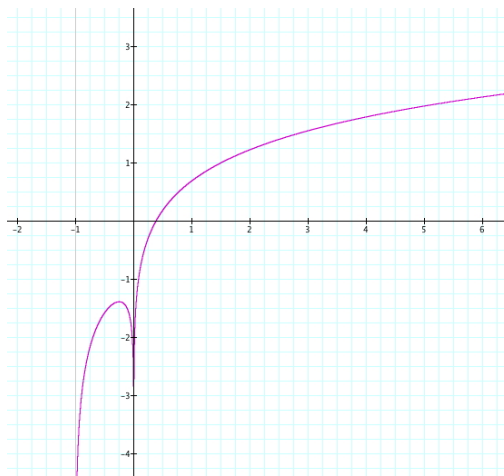
Soluzioni

MATEMATICA

- (1) Il piano Π passante per il punto $P(1, -2, 3)$ ed ortogonale al vettore $\vec{u} = (2, 0, -1)$ ha forma cartesiana del tipo $2x - z + k = 0$, e il passaggio per P dà $k = 1$; quanto a una forma parametrica, due vettori ortogonali a \vec{u} e dunque paralleli a Π (ma non tra loro) sono $(1, 0, 2)$ e $(0, 1, 0)$, da cui $\Pi = \{(1, -2, 3) + s(1, 0, 2) + t(0, 1, 0) : s, t \in \mathbb{R}\} = \{(1 + s, -2 + t, 3 + 2s) : s, t \in \mathbb{R}\}$. Una forma parametrica per la retta r è $r = \{(1, -2, 3) + t(2, 0, -1) : t \in \mathbb{R}\} = \{(1 + 2t, -2, 3 - t) : t \in \mathbb{R}\}$; sostituendo $t = 3 - z$ in $x = 1 + 2t$ e $y = -2$ si ottiene poi una forma cartesiana dal sistema tra le equazioni $x + 2z - 7 = 0$ e $y = -2$. • Usando sia per Π che per r la forma parametrica precedentemente trovata (che è centrata nel punto P), il fatto che la distanza da P debba essere 4 per il piano Π diventa $((1 + s) - 1)^2 + ((-2 + t) - (-2))^2 + ((3 + 2s) - 3)^2 = 4^2$ ovvero $5s^2 + t^2 = 16$: i punti cercati di Π sono dunque quelli della precedente forma parametrica in cui i parametri s e t sono legati dalla condizione trovata (si tratta ovviamente di una circonferenza nel piano centrata in P e di raggio 4). Similmente, per r si trova $((1 + 2t) - 1)^2 + ((-2) - (-2))^2 + ((3 - t) - 3)^2 = 4^2$ ovvero $5t^2 = 16$, da cui $t = \mp \frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{5}$: come previsto i punti sono due, opposti tra loro rispetto a P .
- (2) (Figura 1) La funzione $f(x) = \log(x + \sqrt{|x|})$ è definita quando $x + \sqrt{|x|} > 0$: se $x > 0$ ciò è sempre vero, ed è falso per $x = 0$; invece quando $x < 0$ equivale a $\sqrt{-x} > -x$, ovvero $-x > x^2$, vero per $x > -1$. Ricapitolando, il dominio di $f(x)$ è dato da $x > -1$ con $x \neq 0$ (era possibile, e forse ancora più semplice, ragionare per confronto grafico). I limiti interessanti sono tutti determinati, e valgono $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Si ha poi $f(x) \geq 0$ se e solo se $x + \sqrt{|x|} \geq 1$, cioè $x + \sqrt{|x|} - 1 \geq 0$. Se $x \geq 0$ poniamo $t = \sqrt{x}$, ottenendo $t^2 + t - 1 \geq 0$, vero per $t \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, ovvero $x \geq \frac{3-\sqrt{5}}{2} \sim 0,4$; se invece $x < 0$ scriviamo $\sqrt{-x} \geq 1 - x$, ovvero $-x \geq 1 + x^2 - 2x$, ovvero $x^2 - x + 1 \leq 0$, falso. Non vi sono asintoti obliqui (in effetti, f tende a $+\infty$ con andamento logaritmico). La derivata è $f'(x) = \frac{1 + \frac{\sigma}{2\sqrt{|x|}}}{x + \sqrt{|x|}}$, ove $\sigma = \text{sign } x$: se $x > 0$ essa è sempre > 0 , mentre se $x < 0$ si ha $f'(x) \geq 0$ quando $2\sqrt{|x|} \geq 1$, ovvero per $-1 < x \leq \frac{1}{4}$. Dunque $x = -\frac{1}{4}$ è un punto di massimo locale, con $f(-\frac{1}{4}) = \log \frac{1}{4} = -2 \log 2 \sim -1,4$.
- (3) (a) Posto $e^x = t$, da cui $dx = \frac{1}{t} dt$, si ottiene $\int_0^1 \frac{e^{2x}-4e^x+6}{3-e^x} dx = \int_1^e \frac{t^2-4t+6}{t(3-t)} dt = \int_1^e (-1 + \frac{2}{t} + \frac{1}{3-t}) dt = (-t + 2 \log |t| - \log |3-t|)_1^e = (-e + 2 - \log(3-e)) - (-1 - \log 2) = 3 - e + \log \frac{2}{3-e} \sim 2,2$.
- (b) (Figura 2) L'insieme $S = \{(x, y) : |x+y| \leq x, y \geq x^2 - 3\}$ è rappresentato in figura: riguardo alla condizione $|x+y| \leq x$, se $x+y \geq 0$ (ovvero sopra la bisettrice $y = -x$) essa equivale a $x+y \leq x$, ovvero $y \leq 0$, mentre se $x+y < 0$ (ovvero sotto la bisettrice $y = -x$) essa equivale a $-(x+y) \leq x$, ovvero $y \geq -2x$. Poiché la retta $y = -2x$ e la parabola $y = x^2 - 3$ si intersecano per $x = 1$, l'area risulta $\int_{\sqrt{3}}^1 (x^2 - 3) dx + \int_1^0 (-2x) dx = (\frac{1}{3}x^3 - 3x)_1^{\sqrt{3}} + (-x^2)_1^0 = (-\frac{8}{3}) - (-2\sqrt{3}) + (0) - (-1) = 2\sqrt{3} - \frac{5}{3} \sim 1,8$.
- (4) (a) (Figura 3) Il dominio di $g(x, y) = \frac{3xy-1}{x+3}$ è dato da $x \neq -3$ (va dunque esclusa una retta verticale). La funzione si annulla sui punti dei due rami dell'iperbole equilatera $xy = \frac{1}{3}$ (tranne ovviamente il punto $P(-3, -\frac{1}{9})$, che è fuori dal dominio); il numeratore è positivo nelle due falde all'interno dei rami dell'iperbole, il denominatore lo è a destra della retta $x = -3$, e il segno di g ne segue per quoziente. I limiti interessanti sono nei punti della retta $x = -3$ e in ∞_2 ; in un qualsiasi punto della retta diverso da P il limite è $\mp \infty$ (a seconda del segno di g nella zona da cui si tende al punto in questione), mentre non esiste ne' in P ne' in ∞_2 : in entrambi i casi basta notare che sui rami dell'iperbole la funzione è nulla, mentre avvicinandosi alla retta $x = -3$ la funzione tende a ∞ . Le derivate parziali sono $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{9y+1}{(x+3)^2}$ e $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{3x}{x+3}$, e il sistema $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = 0$ dà il solo punto stazionario $Q(0, -\frac{1}{9})$. Per vedere se Q sia un estremante locale o una sella usiamo il criterio dell'hessiano: essendo $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{-2(9y+1)}{(x+3)^3}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{9}{(x+3)^2}$ e $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$, la matrice hessiana di g in Q è $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, e il criterio dice allora che Q è una sella.
- (b) Il massimo e minimo assoluti di g sul triangolo T (che esistono in base a Weierstrass, visto che g è continua e T è chiuso e limitato; e che saranno entrambi negativi, visto che T è contenuto in una zona del piano in cui $g < 0$) non potranno essere assunti in alcun punto all'interno di T , perché un tale punto dovrebbe in particolare essere stazionario e all'interno di T , come detto, non ve ne è. Gli estremi di g su T dovrebbero dunque essere assunti su qualche punto di bordo. Notiamo che su tutti i punti dell'asse y (dunque in particolare su tutto il lato OB) la funzione vale costantemente $-\frac{1}{3}$, e in A vale $-\frac{1}{4}$. Sul lato OA (cioè il tratto di asse x con $0 < x < 1$) la

funzione vale $g(x, 0) = -\frac{1}{x-3}$; anche in questo caso, un eventuale punto estremante dovrebbe in particolare essere stazionario, ma la derivata $g(x, 0) = \frac{1}{(x-3)^2}$ non si annulla mai. Resta da esaminare il lato obliquo AB , in cui g vale $\varphi(x) := g(x, 1-x) = \frac{3x-3x^2-1}{x+3}$ con $0 < x < 1$: poiché in tale intervallo la derivata $\varphi'(x) = \frac{3x^2+18x-10}{(x+3)^2}$ si annulla solo in $x_0 := \frac{\sqrt{111}-9}{3} \sim 0,51$, troviamo il punto $R(x_0, 1-x_0)$ in cui g vale $\frac{3x_0(1-x_0)-1}{x_0+3} = 21 - 2\sqrt{111} \sim -0,07$. Confrontando i valori messi in evidenza (ovvero $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$ e $21 - 2\sqrt{111}$) possiamo concludere che il massimo assoluto di g su T è $21 - 2\sqrt{111}$ (assunto nel punto R), e il minimo assoluto è $-\frac{1}{3}$ (assunto in tutti i punti del lato OB).

- (5) L'equazione differenziale $y'' - y' - 2y = 4x^2$ è lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $t^2 - t - 2 = 0$ ha soluzioni reali -1 e 2 , dunque le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono del tipo $Ae^{-x} + Be^{2x}$ con $A, B \in \mathbb{R}$. Una soluzione particolare per $b(x) = 4x^2$ sarà del tipo $\tilde{y}(x) = ax^2 + bx + c$, e imponendo che $\tilde{y}'' - \tilde{y}' - 2\tilde{y} = 4x^2$ si ottiene $(a, b, c) = (-2, 2, -3)$. Pertanto tutte le soluzioni della prima equazione differenziale sono $y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} - 2x^2 + 2x - 3$, con $A, B \in \mathbb{R}$. • L'equazione differenziale $(1+x^2)y' = xy$ è del primo ordine a variabili separabili; dopo aver notato che $y = 0$ è soluzione, separando le variabili e integrando si ha $\log|y| = \log\sqrt{1+x^2} + k$, da cui $y(x) = h\sqrt{1+x^2}$ al variare di $h \in \mathbb{R}$. • Quanto alle soluzioni che in $x = 0$ hanno un punto di minimo locale, ricordiamo che se $f(x)$ è una funzione derivabile allora condizione necessaria è che il punto sia stazionario, cioè che $f'(0) = 0$; se inoltre è derivabile due volte, la condizione $f''(0) \geq 0$ è necessaria, mentre $f''(0) > 0$ è addirittura sufficiente. Per le soluzioni dell'equazione del 2o ordine, la derivate sono $y'(x) = -Ae^{-x} + 2Be^{2x} - 4x + 2$ e $y''(x) = Ae^{-x} + 4Be^{2x} - 4$, da cui le condizioni necessarie $y'(0) = 0$ e $y''(0) \geq 0$ danno $-A + 2B + 2 = 0$ e $A + 4B - 4 \geq 0$, ovvero $A = 2B + 2$ e $B \geq \frac{1}{3}$. Se $B > \frac{1}{3}$ la condizione è anche sufficiente; nel caso particolare $B = \frac{1}{3}$ notiamo che $y'''(0) = (-Ae^{-x} + 8Be^{2x})_{x=0} = 0$ e che $y^{(4)}(0) = (Ae^{-x} + 16Be^{2x})_{x=0} = 8 > 0$, dunque anche in questo caso si tratta di punto di minimo. Passando alle soluzioni dell'equazione del 1o ordine, derivando si ha $y'(x) = h\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, dunque per ognuna di esse il punto $x = 0$ è stazionario (come si poteva notare a priori, in quanto $(1+0^2)y'(0) = 0 \cdot y(0)$ da cui $y'(0) = 0$); derivando ancora si ha $y''(x) = h\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$, da cui necessariamente $y''(0) = h \geq 0$; per $h > 0$ tale condizione è sufficiente, mentre per $h = 0$ si ottiene la soluzione nulla (anche per la quale, ovviamente, $x = 0$ è di minimo locale).



1. Il grafico della funzione dell'ex. 2. 2. L'insieme dell'ex. (3.b). 3. Ex. 4: zeri (rosso), segno positivo (giallo) e negativo (grigio) della funzione g ; in azzurro il triangolo T .

ESERCIZIO 1

Su un campione di 200 soluzioni acquose è stato condotto uno studio volto ad analizzarne il livello di acidità. Sono state così rilevate le seguenti frequenze sulle classi di pH.

- calcolare la media aritmetica, la media armonica e la media geometrica;
- disegnare il grafico della distribuzione di frequenze;
- calcolare la mediana e la moda.

Classe pH	f	x_c	$x_c * f$	f/x_c	$\ln(x_c)$	$\ln(x_c) * f$	ampiezza	dens f
0 - 2	55	1	55	55	0	0	2	28
2 - 4	48	3	144	16	1,0986	52,7334	2	24
4 - 6	34	5	170	6,80	1,6094	54,7209	2	17
6 - 14	63	10	630	6,3	2,3026	145,0629	8	8
	200		999	84,1		252,5171		

a) *Calcolo della media aritmetica, armonica e geometrica:*

$$M(X) = \frac{\sum x * f}{\sum f} = \frac{999}{200} = 4,995$$

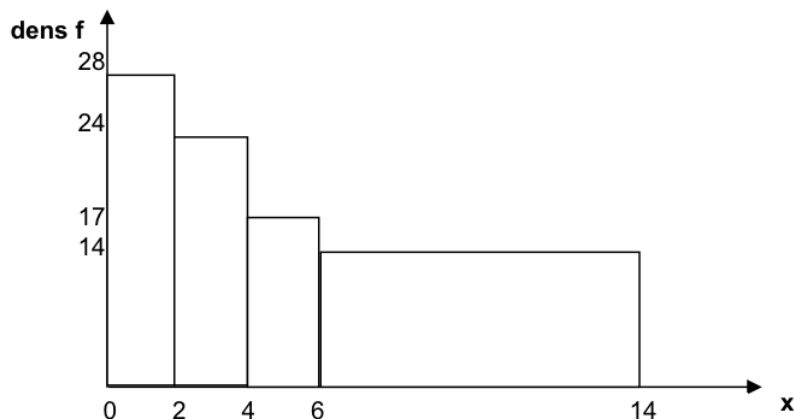
$$Ma(X) = \frac{\sum f}{\sum f/x} = \frac{200}{84,1} = 2,378$$

$$\ln(Mg(X)) = \frac{\sum \ln(x) * f}{\sum f} = \frac{252,5171}{200} = 1,2626 \quad Mg(X) = e^{1,2626} = 3,535$$

b) *Disegno del grafico della distribuzione di frequenze:*

Bisogna tener conto della diversa **ampiezza** delle classi.

Perciò l'altezza degli istogrammi sarà data dalla colonna della **densità di frequenza**.



c) Calcolo della mediana e della moda:

Poiché i dati sono divisi in classi, il calcolo della mediana si effettua tramite il seguente procedimento:

Si individua innanzitutto la classe mediana:

$x_{100} \leq \text{classe mediana} \leq x_{101}$: **classe mediana = 2-4**

La numerosità totale dei dati è pari (200), perciò si utilizzeranno le seguenti due formule per trovare gli estremi inferiore e superiore della mediana:

$$k_1 = x_s + \frac{x_{s+1} - x_s}{f_s} \left(\frac{N}{2} - \sum_{j=1}^{s-1} f_j \right)$$

$$k_2 = x_s + \frac{x_{s+1} - x_s}{f_s} \left(\frac{N}{2} + 1 - \sum_{j=1}^{s-1} f_j \right)$$

Perciò:

$$k_1 = 2 + \frac{4 - 2}{48} \left(\frac{200}{2} - 55 \right) = 3.875$$

$$k_2 = 2 + \frac{4 - 2}{48} \left(\frac{200}{2} + 1 - 55 \right) = 3.9167$$

Quindi: **3,875 ≤ mediana ≤ 3,9167**

Anche per il calcolo della moda occorre tener conto dell'ampiezza delle classi.

In particolare la classe modale sarà data dalla classe con la densità di frequenza maggiore.

Di conseguenza:

Classe modale: 0 - 2

ESERCIZIO 2

Sulla distribuzione di frequenze della tabella precedente, calcolare:

- la varianza;
- lo scarto quadratico medio;
- il coefficiente di variazione;
- il campo di variazione e il range relativo alla media.

Classe pH	f	x_c	x_c^2	$x_c^2 f$
0 - 2	55	1	1	55
2 - 4	48	3	9	432
4 - 6	34	5	25	850
6 - 14	63	10	100	6300
	200			7637

a) Calcolo della varianza (ad esempio usando il secondo metodo):

$$V(x) = M(x^2) - m^2 = \frac{7637}{200} - 4,995^2 = 38,185 - 24,95 = 13,235$$

b) Calcolo dello scarto quadratico medio:

Calcolo la radice quadrata della $V(x)$:

$$\sigma(x) = \text{RADQ}(13,235) = 3,638$$

c) Calcolo del coefficiente di variazione:

$$Cv = \frac{\sigma(x)}{M(x)} = \frac{3,638}{4,995} = 0,7283$$

d) Calcolo del campo di variazione e del range relativo alla media:

$$\text{Campo di variazione} = X_{\text{Max}} - X_{\text{min}} = 14 - 0 = 14$$

$$\text{Range rel. alla media} = (X_{\text{max}} - X_{\text{min}}) / m = 14 / 4,995 = 2,8028$$

ESERCIZIO 3

Nell'ambito di una ricerca condotta sul gruppo sanguigno di 100 persone sono state rilevate le seguenti frequenze. Sulla base dei dati presentati nella tabella, si può considerare valida l'ipotesi di distribuzione uniforme delle frequenze dei gruppi sanguigni (ad un livello di significatività del 2,5%)?

Si effettua un test di omogeneità per confrontare la distribuzione osservata delle **f** con una distribuzione di frequenze teoriche **uniforme**; le frequenze teoriche **F** saranno quindi tutte uguali e pari ad un quarto del totale ovvero **25**.

gruppo	f	F	$(f-F)^2/F$
A	30	25	1
B	20	25	1
AB	15	25	4
O	35	25	4
	100	100	10

Calcolo del Chi Quadrato:

$$\text{ChiQc} = 10$$

Si individua sulle tavole del Chi Quadrato il valore teorico da confrontare:

$$n_i = n - 1 = 4 - 1 = 3 \text{ gdl} \qquad \alpha = 2,5\%$$

$$\text{ChiQt} = 9,35$$

Poiché $\text{ChiQc} > \text{ChiQt}$ si rifiuta l'ipotesi di omogeneità fra le due distribuzioni.