Matematica e Statistica

Prova d'Esame (18/02/2010)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2009/10

Matematica e Statistica

Prova d'Esame di $\boxed{\text{MATEMATICA}}$ (18/02/2010)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2009/10

Cognome-Nome ______________________________ Matr. ______________
IN STAMPATELLO

(1) I vettori $\vec{v} = (1, -1, 0)$ e $\vec{w} = (2, 0, -3)$ individuano un parallelogramma: se ne calcoli l'area. Si determinino poi, in forma parametrica e cartesiana: (a) il piano Π parallelo a $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e passante per $P(-1, 3, 2)$; (b) il piano Σ perpendicolare a $\vec{v}$ e passante per l'origine; (c) la retta $r = \Pi \cap \Sigma$.

(2) Studiare l'andamento di $f(x) = (x^2 - x) \log |x - 1|$, e tracciarne il grafico[(1)].

(3) (a) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x} + 1}{x + 1}\, dx$ e $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 + 3 \sin x}\, \cos x\, dx$.

(b) Disegnare $S = \{(x, y) : x^2 - 3x \le y \le \sin 2x\,,\ |y + 1| \le y - x + 2\}$, e calcolarne l'area.

(4) Data $g(x, y) = \dfrac{x^2 y - 1}{x + y}$, determinarne dominio, zeri, segno e limiti interessanti, disegnando i risultati. Trovarne i punti stazionari e eventuali punti di estremo locale. Determinare infine l'equazione cartesiana del piano tangente al grafico di g sopra il punto $P(1, 0)$.

(5) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y'' + y' + y = 2 + \sin x$, e tutte quelle dell'equazione differenziale $y' + y \operatorname{tg} x = 2 \operatorname{tg} x$, dicendo se ve ne sono in comune. Determinare poi tutte le soluzioni delle due equazioni il cui grafico passa per il punto $(0, 1)$.

[(1)] Nello studio della derivata prima sarà utile un confronto grafico; non serve studiare la derivata seconda.

Matematica e Statistica

Prova d'Esame di STATISTICA (18/02/2010)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2009/10

Cognome-Nome ______________________________ Matr. ______________

IN STAMPATELLO

Per ogni calcolo effettuato scrivere anche la formula teorica da utilizzare.

ESERCIZIO 1

Sulla seguente distribuzione di frequenze di dati divisi in classi:

x	f
1 – 3	20
3 – 7	12
7 – 11	32
11 – 15	36

a) calcolare la media aritmetica e la media armonica;
b) disegnare il grafico della distribuzione di frequenze;
c) calcolare la mediana e la moda.

ESERCIZIO 2

Nella tabella seguente viene riportata la superficie in ettari coltivata a mais transgenico in un paese della provincia di Verona dal 2004 al 2007.

anno	ettari
2004	27
2005	32
2006	18
2007	54

Calcolare:

a) i numeri indice a base fissa 2004;
b) i numeri indice a base mobile.

ESERCIZIO 3

Sui dati presentati in tabella:

X	Y
2	24
4	32
5	30
8	0

a) interpolare i parametri del modello teorico $Y'=aX+bX^2$ utilizzando il metodo dei minimi quadrati;
b) giudicare la bontà di accostamento del modello teorico.

Soluzioni

MATEMATICA

(1) Il prodotto vettoriale tra $\vec{v} = (1,-1,0)$ e $\vec{w} = (2,0,-3)$ è $\vec{v} \wedge \vec{w} = (3,3,2)$, e l'area del parallelogramma tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$ è $|\vec{v} \wedge \vec{w}| = \sqrt{22}$. Il piano Π parallelo a $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e passante per $P(-1,3,2)$ è, in forma parametrica, $\Pi = \{(-1,3,2) + s(1,-1,0) + t(2,0,-3) : s,t \in \mathbb{R}\} = \{(-1+s+2t, 3-s, 2-3t) : s,t \in \mathbb{R}\}$; sostituendo poi $s = 3-y$ e $t = \frac{1}{3}(2-z)$ in $x = -1+s+2t$ si ottiene la forma cartesiana $3x+3y+2z-10 = 0$ (si noti che i coefficienti di x, y, z sono quelli di $\vec{v} \wedge \vec{w}$). Il piano Σ, perpendicolare a $\vec{v}$, avrà equazione $(1)x+(-1)y+(0)z+k = 0$, e il passaggio per l'origine dà $k = 0$, da cui $x - y = 0$; e in forma parametrica è ad esempio $\Sigma = \{(0,0,0) + s(1,1,0) + t(0,0,1) : s,t \in \mathbb{R}\} = \{(s,s,t) : s,t \in \mathbb{R}\}$ La retta $r = \Pi \cap \Sigma$ ha forma cartesiana data dal sistema delle equazioni di Π e Σ; un punto di r è ad esempio $(1,1,2)$, un vettore parallelo è $(3,3,2) \wedge (1,-1,0) = (2,2,-6)$ (o anche $(1,1,-3)$), dunque una forma parametrica è $r = \{(1,1,2) + t(1,1,-3) : t \in \mathbb{R}\} = \{(1+t, 1+t, 2-3t) : t \in \mathbb{R}\}$.

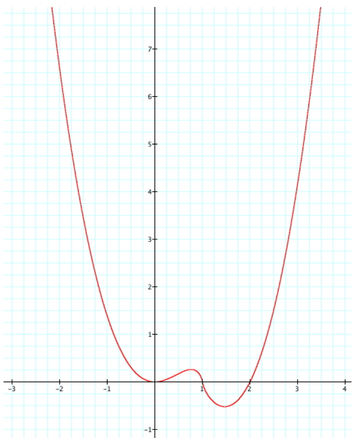
(2) (Figura 1) La funzione $f(x) = (x^2-x)\log|x-1|$ è definita per $x \neq 1$, ed è derivabile infinite volte. Nel dominio, il fattore x^2-x è ≥ 0 per $x \leq 0$ e $x > 1$; il fattore $\log|x-1|$ è ≥ 0 per $|x-1| \geq 1$, ovvero per $x \leq 0$ e $x \geq 2$: pertanto f si annulla in $x = 0$ e $x = 2$, ed è positiva per $x < 0$, $0 < x < 1$ e $x > 2$. I limiti interessanti sono $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = +\infty$ (determinato) e $\lim_{x\to 1\mp} f(x) = 0^{\pm}$ (indeterminato, ma si può risolvere con de l'Hôpital o, dopo aver posto $t = x-1$, col limite notevole $\lim_{t\to 0\mp} t\log|t| = 0^{\pm}$), dunque si potrebbe estendere f per continuità anche in $x = 1$ ponendo $f(1) := 0$. Non vi sono pertanto asintoti orizzontali e verticali, e (essendo $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{x} = \mp\infty$) nemmeno obliqui. Derivando si ottiene $f'(x) = (2x-1)\log|x-1| + (x^2-x)\frac{1}{x-1} = (2x-1)\log|x-1| + x$: pertanto si ha $f'(x) = 0$ quando $\log|x-1| = -\frac{x}{2x-1}$, e un confronto grafico tra $\log|x-1|$ (il logaritmo simmetrizzato e traslato a destra di 1) e $-\frac{x}{2x-1}$ (l'omografica che si annulla in $x = 0$ e con asintoti $x = \frac{1}{2}$ e $y = -\frac{1}{2}$) mostra senza alcun dubbio che ciò accade in $x = 0$ e in altri due punti $x = a \sim 0{,}8$ e $x = b \sim 1{,}5$. Quanto al segno della derivata, se $x < \frac{1}{2}$ si ha $f'(x) > 0$ per $\log|x-1| < -\frac{x}{2x-1}$, vero quando $0 < x < \frac{1}{2}$; se $x = \frac{1}{2}$ si ha $f'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} > 0$; e se $x > \frac{1}{2}$ si ha $f'(x) > 0$ per $\log|x-1| > -\frac{x}{2x-1}$, vero quando $\frac{1}{2} < x < a$ oppure $x > b$. Dunque f decresce fino a $x = 0$, poi cresce da $x = 0$ a $x = a$, decresce da $x = a$ a $x = b$, e poi cresce: ne risulta che $x = 0$ e $x = b$ sono di minimo (con $f(0) = 0$ e $f(b) \sim -0{,}5$) e $x = a$ è di massimo (con $f(a) \sim 0{,}3$). Notiamo anche che $\lim_{x\to 1\mp} f'(x) = -\infty$, dunque in $x = 1$ il grafico di f ha pendenza che diverge. Infine, derivando ancora si ottiene $f'(x) = 2\log|x-1| + (2x-1)\frac{1}{x-1} + 1 = 2\log|x-1| + \frac{3x-2}{x-1}$, dunque si potrebbe studiare la convessità di f come appena fatto con la crescenza, tramite un confronto grafico tra un logaritmo traslato e un'omografica (risulta un flesso regolare in $x \sim 0{,}4$, e un "flesso tecnico" in $x = 1$).

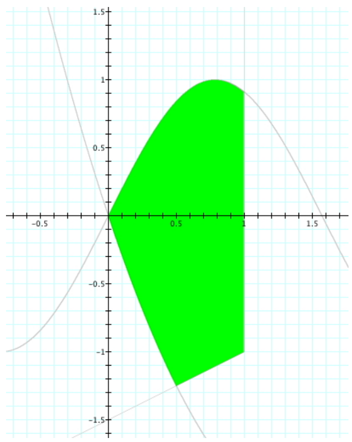
(3) (a) Posto $x = t^2$ (da cui $dx = 2t\,dt$) si ricava $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}+1}{x+1}\,dx = 2\int_0^1 \frac{t^2+t}{t^2+1}\,dt = 2\int_0^1 (1 + \frac{t-1}{t^2+1})\,dt = 2(t + \frac{1}{2}\log(t^2+1) - \operatorname{arctg} t]_0^1 = 2 + \log 2 - \frac{\pi}{2} \sim 1{,}2$. • Posto $t = \sin x$ (da cui $dt = \cos x\,dx$) si ha $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2+3\sin x}\,\cos x\,dx = \int_0^1 \sqrt{2+3t}\,dt = \frac{1}{3}\int_0^1 3\sqrt{2+3t}\,dt = \frac{1}{3}(\frac{(2+3t)^{3/2}}{3/2}]_0^1 = \frac{1}{3}(\frac{10}{3}\sqrt{5}) - \frac{1}{3}(\frac{4}{3}\sqrt{2}) = \frac{10\sqrt{5}-4\sqrt{2}}{9} \sim 1{,}85$.

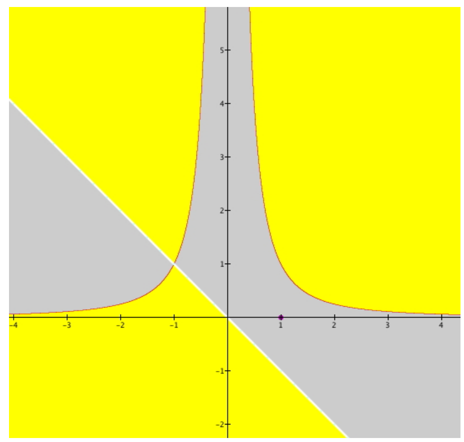
(b) (Figura 2) L'insieme $S = \{(x,y) : x^2-3x \leq y \leq \sin 2x\,,\ |y+1| \leq y-x+2\}$ è rappresentato in figura (si noti che la condizione $|y+1| \leq y-x+2$ se $y \geq -1$ dà $x \leq 1$, mentre se $y < -1$ dà $y \geq \frac{1}{2}(x-3)$, e i punti d'intersezione tra la parabola $y = x^2-3x$ e la retta $y = \frac{1}{2}(x-3)$ sono $(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4})$ e $(3,0)$, dei quali ci interessa solo il primo); l'area risulta pertanto $\int_0^1 \sin 2x\,dx + \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}(x-3)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^0 (x^2-3x)\,dx = (-\frac{1}{2}\cos 2x]_0^1 + (\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x]_1^{\frac{1}{2}} + (\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{\frac{1}{2}}^0 = (-\frac{1}{2}\cos 2) - (-\frac{1}{2}) + (-\frac{11}{16}) - (-\frac{5}{4}) + (0) - (-\frac{1}{3}) = -\frac{1}{2}\cos 2 + \frac{67}{48} \sim 1{,}6$.

(4) (Figura 3) Il dominio di $g(x,y) = \frac{x^2y-1}{x+y}$ è dato da $x+y \neq 0$ (vanno esclusi i punti dell'antibisettrice $x+y = 0$). Si ha $g(x,y) = 0$ quando $x^2y - 1 = 0$, ovvero sul grafico $y = \frac{1}{x^2}$; per il segno, il numeratore è > 0 sopra tale grafico e < 0 sotto (e sull'asse y), il denominatore è > 0 sopra l'antibisettrice e < 0 sotto, e il segno di g ne segue per quoziente. Si noti che grafico e antibisettrice si intersecano nel solo punto $A(-1,1)$; in un qualsiasi punto dell'antibisettrice diverso da A il limite di g vale ∞ (il segno dipende dal fatto che si tenda a tale punto da sopra o da sotto), mentre in A e in ∞_2 il limite di g non esiste, perché tendendovi lungo il grafico $y = \frac{1}{x^2}$ la funzione è nulla, mentre ad esempio tendendovi lungo la retta $x = -1$ si ha $g(-1,y) = \frac{y-1}{-1+y} = 1$ (vale costantemente 1). Le derivate parziali sono $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{2xy(x+y)-(x^2y-1)}{(x+y)^2} = \frac{x^2y+2xy^2+1}{(x+y)^2}$ e $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{x^2(x+y)-(x^2y-1)}{(x+y)^2} = \frac{x^3+1}{(x+y)^2}$, dunque il sistema $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = 0$ dà come soluzioni il già noto $A(-1,1)$ (fuori dal dominio, dunque da escludere) e un altro punto $B(-1,-\frac{1}{2})$; dunque l'unico punto stazionario è B, che il criterio dell'hessiano rivela poi essere una sella (dai conti risulta $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(B) = \frac{34}{27}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(B) = 0$ e $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(B) = \frac{54}{27}$). Infine, l'equazione cartesiana del piano tangente al grafico di g sopra il punto $P(1,0)$ è data da $z = g(P) + \frac{\partial g}{\partial x}(P)(x-1) + \frac{\partial g}{\partial y}(P)(y-0) = -1 + 1(x-1) + 2(y-0)$, ovvero $x + 2y - z - 2 = 0$.

(5) L'equazione differenziale $y'' + y' + y = 2 + \sin x$ è lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $t^2 + t + 1 = 0$ ha soluzioni $\frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$, dunque le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono del tipo $Ae^{-\frac{x}{2}}\cos(\frac{\sqrt{3}x}{2}) + Be^{-\frac{x}{2}}\sin(\frac{\sqrt{3}x}{2})$ con $A, B \in \mathbb{R}$. Una soluzione particolare per $b_1(x) = 2$ sarà del tipo $\tilde{y}_1(x) = a$, e imponendo che $\tilde{y}_1'' + \tilde{y}_1' + \tilde{y}_1 = 2$ si ottiene subito $a = 2$. Una soluzione particolare per $b_2(x) = \sin x$ sarà del tipo $\tilde{y}_2(x) = a\cos x + b\sin x$, e imponendo che $\tilde{y}_2'' + \tilde{y}_2' + \tilde{y}_2 = \sin x$ si ottiene $(-a+b+a)\cos x + (-b-a+b)\sin x = \sin x$, ovvero $b = 0$ e $-a = 1$, da cui $(a,b) = (-1,0)$, dunque $\tilde{y}_2(x) = -\cos x$. Pertanto tutte le soluzioni della prima equazione differenziale sono $y(x) = e^{-\frac{x}{2}}(A\cos(\frac{\sqrt{3}x}{2}) + B\sin(\frac{\sqrt{3}x}{2})) + 2 - \cos x$, con $A, B \in \mathbb{R}$. • L'equazione differenziale $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = 2\,\mathrm{tg}\,x$ è lineare del primo ordine. Scritta nella forma $y' + p(x)\,y = q(x)$ con $p(x) = \mathrm{tg}\,x$ e $q(x) = 2\,\mathrm{tg}\,x$ e risolta ad esempio in $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (dove $\cos x > 0$), si ha $P(x) = \int p(x)\,dx = -\log\cos x$, e $\int e^{P(x)}q(x)\,dx = 2\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \frac{2}{\cos x}$, dunque si ottiene $y(x) = \cos x(\frac{2}{\cos x} + k) = 2 + k\cos x$ con $k \in \mathbb{R}$. L'unica soluzione in comune tra le due equazioni è perciò $y(x) = 2 - \cos x$. • Le soluzioni il cui grafico passa per il punto $(0,1)$ sono quelle tali che $y(0) = 1$, ovvero, per la prima equazione, tali che $A + 1 = 1$ (cioè $A = 0$), dunque quelle del tipo $y(x) = Be^{-\frac{x}{2}}\sin(\frac{\sqrt{3}x}{2}) + 2 - \cos x$, con $B \in \mathbb{R}$; e per la seconda, tali che $y(x) = 2 + k = 1$, ovvero $k = -1$, cioè la sola già nota $y(x) = 2 - \cos x$.







1. Il grafico della funzione dell'ex. 2. **2.** L'insieme dell'ex. (3.b). **3.** Ex. 4: dominio (parte colorata), zeri (rosso), segno positivo (giallo) e negativo (grigio) della funzione g; il punto P (viola).

ESERCIZIO 1

Sui seguenti dati distribuiti per classi:
a) calcolare la media aritmetica e la media armonica;
b) disegnare il grafico della distribuzione di frequenze;
c) calcolare la mediana e la moda.

x	**f**	**x_c**	**x_c*f**	**f/x_c**	**ampiezza**	**dens f**
1 - 3	20	2	40	10,00	2	10
3 - 7	12	5	60	2,40	4	3
7 - 11	32	9	288	3,56	4	8
11 - 15	36	13	468	2,7692	4	9
	100		**856**	**18,72479**		

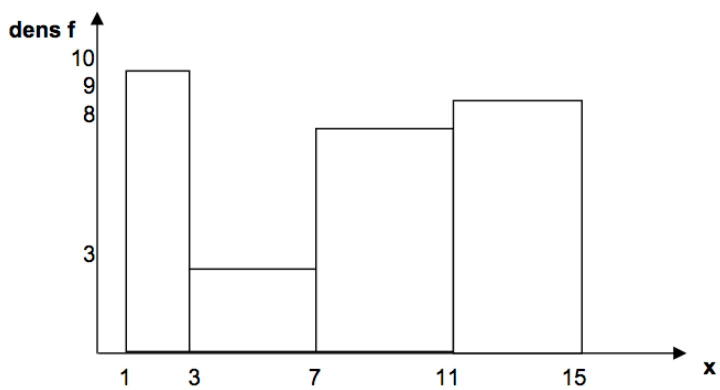
a) Calcolo della media aritmetica e armonica:

$$\mathbf{M(X)} = \frac{\Sigma\, x * f}{\Sigma\, f} = \frac{856}{100} = \mathbf{8{,}56}$$

$$\mathbf{Ma(X)} = \frac{\Sigma\, f}{\Sigma\, f/x} = \frac{100}{18{,}7248} = \mathbf{5{,}341}$$

b) Disegno del grafico della distribuzione di frequenze:

Bisogna tener conto della diversa **ampiezza** delle classi.
Perciò l'altezza degli istogrammi sarà data dalla colonna della **densità di frequenza**.



c) Calcolo della mediana e della moda:

Poiché i dati sono divisi in classi, il calcolo della mediana si effettua tramite il seguente procedimento:

Si individua innanzitutto la classe mediana:
x50 =< classe mediana =< x51 : **classe mediana = 7-11**

La numerosità totale dei dati è pari (100), perciò si utilizzeranno le seguenti due formule per trovare gli estremi inferiore e superiore della mediana:

$$k_1 = x_s + \frac{x_{s+1} - x_s}{f_s}\left(\frac{N}{2} - \sum_{j=1}^{s-1} f_j\right)$$

$$k_2 = x_s + \frac{x_{s+1} - x_s}{f_s}\left(\frac{N}{2} + 1 - \sum_{j=1}^{s-1} f_j\right)$$

Perciò:

$$k_1 = 7 + \frac{11-7}{32}\left(\frac{100}{2} - 32\right) = 9.25$$

$$k_2 = 7 + \frac{11-7}{32}\left(\frac{100}{2} + 1 - 32\right) = 9.375$$

Quindi: **9,25 <= mediana <= 9,375**

Anche per il calcolo della moda occorre tener conto dell'ampiezza delle classi.
In particolare la classe modale sarà data dalla classe con la densità di frequenza maggiore.
Di conseguenza:

Classe modale: 1 - 3

ESERCIZIO 2

Nella tabella seguente viene riportata la superficie in ettari coltivata a mais transgenico in un paese della provincia di Verona dal 2004 al 2007. Sui dati presentati calcolare:

a) i numeri indice a base fissa 2004;
b) i numeri indice a base mobile.

anno	ettari	$I_{\text{base 2004}}$	$I_{\text{base Mobile}}$
2004	27	1	-
2005	32	1,1852	1,1852
2006	18	0,6667	0,5625
2007	54	2	3

a) Calcolo dei numeri indice a base 2004:

$I_{\text{base 2004}}$

$$\frac{x\ 2004}{x\ 2004} = \mathbf{1}$$

$$\frac{x\ 2005}{x\ 2004} = \mathbf{1{,}1852}$$

$$\frac{x\ 2006}{x\ 2004} = \mathbf{0{,}6667}$$

$$\frac{x\ 2007}{x\ 2004} = \mathbf{2}$$

b) Calcolo dei numeri indice a base mobile:

$I_{\text{base mobile}}$

$$\frac{x\ 2005}{x\ 2004} = \mathbf{1{,}1852}$$

$$\frac{x\ 2006}{x\ 2005} = \mathbf{0{,}5625}$$

$$\frac{x\ 2007}{x\ 2006} = \mathbf{3}$$

ESERCIZIO 3

X	Y	X^2	X^3	X^4	Y*X	Y*X^2	Y'
2	24	4	8	16	48	96	24
4	32	16	64	256	128	512	32
5	30	25	125	625	150	750	30
8	0	64	512	4096	0	0	0
19	**86**	**109**	**709**	**4993**	**326**	**1358**	

Sui dati presentati in tabella calcolare:
a) i parametri del modello teorico $Y'=aX+bX^2$ utilizzando il metodo dei minimi quadrati;
b) giudicare la bontà di accostamento del modello teorico.

a) Calcolo dei parametri del modello teorico $Y'=aX+bX^2$ utilizzando il metodo dei minimi quadrati:

$$S=\sum(Y'-Y)^2=\sum(aX+bX^2-Y)^2$$

Calcolo il valore minimo della funzione S ponendo pari a zero le sue derivate prime parziali:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a}=2\sum(aX+bX^2-Y)X=0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b}=2\sum(aX+bX^2-Y)X^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\sum X^2+b\sum X^3=\sum YX \\ a\sum X^3+b\sum X^4=\sum YX^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 109a + 709b = 326 \\ 709a + 4993b = 1358 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema risulta:

a = 16

b = -2

Il modello teorico diventa quindi: Y' = 16X -2X^2

b) Giudicare la bontà di accostamento del modello teorico.

Per giudicare la bontà di accostamento del modello teorico, calcolo i valori di Y' al variare della X (vedi ultima colonna della tabella soprastante)

Poiché i valori assunti dal modello teorico Y' coincidono con i valori osservati Y, si può direttamente concludere che il modello teorico si adatta perfettamente alla realtà osservata.