l'area laterale della piramide (ovvero, la superficie da rivestire di linoleum) è minima. Sia x la lunghezza del lato di base della vasca: l'altezza h della piramide (profondità centrale della vasca) soddisfa $V = \frac{hx^2}{3}$, da cui $h = \frac{3V}{x^2}$. L'apotema della piramide (altezza delle quattro facce triangolari laterali) è dato da $a = \sqrt{h^2 + (\frac{x}{2})^2} = \frac{\sqrt{x^6+36V^2}}{2x^2}$: dunque l'area laterale della piramide è data da $S(x) = 4\frac{ax}{2} = \frac{\sqrt{x^6+36V^2}}{x}$, definita per $x > 0$. La derivata è $S'(x) = \frac{\frac{6x^5}{2\sqrt{x^6+36V^2}}x - \sqrt{x^6+36V^2}}{x^2} = \frac{2(x^6-18V^2)}{x^2\sqrt{x^6+36V^2}}$, e si ha $S'(x) = 0$ per $x = \sqrt[6]{18V^2}$ e $S'(x) > 0$ per $x > \sqrt[6]{18V^2}$. Dunque il massimo risparmio si ottiene quando il lato della vasca è lungo $\sqrt[6]{18V^2}$. **(5)** Levando all'area del quadrato Q i pezzi che non stanno in T, si ha che l'area di T è $\ell^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{(\ell-x)^2}{2} - \frac{(\ell-x+x)x}{2} = x(\ell - x)$, dunque la piramide ha volume $y = f(x) = \frac{x}{3}x(\ell - x) = \frac{x^2(\ell-x)}{3}$. Derivando, si ottiene $f'(x) = \frac{1}{3}(2x(\ell - x) - x^2) = \frac{1}{3}x(2\ell - 3x)$. Vale $f'(x) = 0$ per $x = \frac{2}{3}\ell$, e $f'(x) > 0$ se e solo se $0 < x < \frac{2}{3}\ell$. Pertanto il valore massimo del volume della piramide si ottiene quando $x = \frac{2}{3}\ell$.

3.4 Studio dell'andamento di una funzione

Abbiamo ormai sviluppato gli strumenti necessari per studiare le funzioni reali di una variabile reale $f : A_f \to \mathbb{R}$ (ove $A_f \subset \mathbb{R}$ rappresenta il *dominio naturale* di f, vedi pag. 49) in modo dettagliato, con lo scopo finale di tracciarne il grafico

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A_f,\ y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Diamo subito uno schema di massima dei punti da determinare in questo studio:

(1) dominio naturale A_f;
(2) eventuali periodicità di f;
(3) eventuali parità di f;
(4) continuità di f;
(5) limiti notevoli di f;
(6) limitatezza di f;
(7) intersezioni del grafico Γ_f con gli assi coordinati;
(8) segno di f;
(9) asintoti di f, e loro eventuali intersezioni col grafico Γ_f;
(10) derivabilità di f, e calcolo di f';
(11) punti stazionari di f;
(12) crescenza di f;
(13) estremanti locali di f;
(14) derivabilità ulteriore di f, e calcolo di f'';
(15) punti stazionari di f';
(16) convessità di f;
(17) punti di flesso di f, e calcolo della "tangente inflessionale";
(18) descrizione della regolarità di f.

Molti di questi punti sono già chiari, altri meno, altri ancora per nulla: in ogni caso, li trattiamo uno ad uno nel seguito.

(1) Il dominio naturale A_f della funzione può essere esplicitamente assegnato nel caso in cui f è definita punto per punto, oppure, se f è descritta solo tramite la sua espressione algebrica, esso è per definizione il più grande sottoinsieme di f in tutti i punti del quale tale espressione ha senso (vedi pag. 49). Così, ad esempio, se si definisce $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^4-3} & (\text{se } x < -2) \\ \sin x & (\text{se } -2 \le x < 1) \\ \sqrt{x^4-3} & (\text{se } 0 \le x \le \frac{3}{2}) \\ \sqrt{6} & (\text{se } x = 3) \end{cases}$ è già stabilito che sia $A_f = \mathbb{R}_{<1} \cup [0, \frac{3}{2}] \cup \{3\}$, mentre se si dà solo l'espressione $g(x) = \frac{\sqrt{1+\log x}}{x^2-5}$ si intende che A_g sia definito dal sistema $\begin{cases} 1+\log x \ge 0 \\ x > 0 \\ x^2 - 5 \ne 0 \end{cases}$, ovvero $A_g = \left(\mathbb{R}_{\ge \frac{1}{e}}\right) \setminus \{\sqrt{5}\}$.

(2) Si tratta di vedere se f è una funzione periodica (vedi pag. 51). In tal caso, denotato con $\tau_f > 0$ il periodo di f, basterà studiare f in un tratto di A_f ottenuto intersecando A_f con un intervallo chiuso di lunghezza τ_f. Ad esempio, $f(x) = \log(2\sin^2 x - 1)$ ha dominio naturale $A_f = \{x \in \mathbb{R} : |\sin x| > \frac{1}{2}\}$, ovvero $A_f = \{x \in \mathbb{R} : |\sin x| > \frac{1}{2}\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi[$; tuttavia, essendo periodica di periodo $\tau_f = \pi$, si può studiarla in un qualsiasi tratto ottenuto intersecando A_f con un intervallo chiuso lungo π, ad esempio in $A_f \cap [0, \pi] =]\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}[$.

(3) Si tratta di vedere se f è una funzione pari oppure dispari (vedi pag. 51). In tal caso, basterà studiare la funzione in $A_f \cap \mathbb{R}_{\ge 0}$.

(4) Vanno determinati i punti di A_f in cui f è continua.

(5) Vanno calcolati i limiti di f nei punti di accumulazione di A_f in $\widetilde{\mathbb{R}}$ che non stanno in A_f, e in tutti i punti di A_f in cui f è discontinua. Se tali punti stanno in $\mathbb{R}$ (cioè, se sono diversi da $\pm\infty$), bisogna aver cura di considerare distintamente i limiti a destra ed a sinistra, perché essi possono essere diversi. Ad esempio, per la funzione $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}} e^{\frac{1}{x}}$, in cui si ha $A_f = (\mathbb{R}_{<1}) \setminus \{0\}$, i limiti notevoli sono in $-\infty$, 0^-, 0^+ e 1^- (e valgono rispettivamente $-\infty$, 0^-, $+\infty$ e $+\infty$).

(6) Le intersezioni del grafico Γ_f con l'asse x sono date dalle soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$ in A_f, ovvero sono i punti $\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in A_f,\ f(x) = 0\}$; se 0 sta nel dominio A_f, l'asse y e Γ_f si intersecano ovviamente nell'unico punto $(0, f(0))$.

(7) Si tratta di determinare i tratti del dominio A_f in cui la funzione è positiva o negativa, ovvero $A_f^{\pm} = \{x \in A_f : f(x) \gtrless 0\}$. Si noti che ciò permette una verifica incrociata con il calcolo dei limiti notevoli, in cui capita a volte di azzeccare che si tratta di un infinito, finito o infinitesimo ma di sbagliare il segno: ad esempio, se $f(x) = (x-3)e^{-\frac{1}{x}}$, essendo $A_f^+ = \mathbb{R}_{>3}$ e $A_f^- = (\mathbb{R}_{<3}) \setminus \{0\}$ si è certi che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^-$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(8) La funzione è *limitata* se esiste $M > 0$ tale che $|f(x)| \leq M$ per ogni x nel dominio A_f; naturalmente, ciò non è vero se uno dei limiti notevoli è ∞. Ad esempio, se $f(x) = \sin g(x)$ oppure $f(x) = \frac{1}{1+g(x)^2}$ allora certamente vale $|f(x)| \leq 1$ per ogni x nel dominio $A_f = A_g$; se $f(x) = \operatorname{arctg}^2 g(x)$ allora $|f(x)| \leq (\frac{\pi}{2})^2 = \frac{\pi^2}{4}$ per ogni $x \in A_f = A_g$; se $f(x) = \sqrt{4 - g(x)^2}$ allora $|f(x)| \leq 2$ (anzi, in questo caso, $0 \leq f(x) \leq 2$) per ogni $x \in A_f = \{x \in A_g : 4 - g(x)^2 \geq 0\} = \{x \in A_g : |g(x)| \leq 2\}$.

(9) Gli *asintoti* di f sono le curve del piano "alle quali il grafico tende indefinitamente" quando la variabile tende a $+\infty$, oppure a $-\infty$. Più precisamente, diremo che una funzione $\widetilde{f}$ definita in un intorno di $+\infty$ è un *asintoto per f a $+\infty$* se $f - \widetilde{f} = o_{+\infty}(1)$, ovvero se $f - \widetilde{f}$ è infinitesima in $+\infty$; per $-\infty$ sussiste una definizione del tutto analoga, che può condurre a risultati indipendenti, nel senso che potrebbe accadere che $\widetilde{f}$ sia un asintoto per f a $-\infty$ ma non in $+\infty$, o viceversa. Si noti che questa nozione (che è evidentemente una relazione di equivalenza) è distinta da quella di "asintoticità": se ad esempio $\alpha(x) = x$ e $\beta(x) = x + 1$ le funzioni α e β sono asintotiche a $+\infty$ ma α non è asintoto per β (il resto $\widetilde{f} - f = 1$ è più piccolo di f ma non è infinitesimo); se invece $\alpha(x) = \frac{1}{x^2}$ e $\beta(x) = \frac{x+1}{x^2}$, α è asintoto per β ma α e β non sono asintotiche (il resto $\widetilde{f} - f = \frac{1}{x}$ è infinitesimo ma non è $o_{+\infty}(f)$, anzi vale il contrario).
Determinare un asintoto per f diciamo a $+\infty$ può essere assai utile per meglio comprendere l'andamento di $f(x)$ quando x tende verso $+\infty$, e dunque per tracciare il grafico con maggiore accuratezza. Gli asintoti più importanti sono ovviamente, per la loro semplicità, le funzioni polinomiali $\widetilde{f}(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ (di grado n se $a_n \neq 0$), e dunque in particolare le costanti $\widetilde{f}(x) \equiv k$, le lineari $\widetilde{f}(x) = mx+q$, le quadratiche $\widetilde{f}(x) = ax^2+bx+c$ (i cui grafici, come sappiamo, sono rispettivamente una retta non parallela all'asse y ed una parabola con asse parallelo all'asse y), le cubiche, le quartiche e così via. Come capire se e quando una di queste funzioni può essere un asintoto per f? Vediamo ad esempio per le rette.

Proposizione 3.4.1. $y = mx + q$ (con $m, q \in \mathbb{R}$) *è asintoto per f a $\pm\infty$ se e solo se valgono le seguenti due condizioni:*

- (c$_0$) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ *esiste finito e vale m;*
- (c$_1$) $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx)$ *esiste finito e vale q.*

Dimostrazione. Per definizione $y = mx + q$ è asintoto per f a $\pm\infty$ se e solo se $f(x) = mx + q + o_{\pm\infty}(1)$ da cui $\frac{f(x)}{x} = m + \frac{q}{x} + o_{\pm\infty}(\frac{1}{x})$, da cui $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$; essendo poi $q = f(x) - mx + o_{+\infty}(1)$, passando al limite si ricava $q = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx)$. Viceversa, da $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx) = q$ si ricava subito $\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x) - (mx + q)\big) = 0$. $\square$

Se $y = mx + q$ è asintoto per f e $m = 0$ (ovvero se si ha una retta della forma $y = k$, parallela all'asse x) ciò equivale a chiedere che sia $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = k$ e si dirà che la retta $y = k$ è un "asintoto orizzontale a $\pm\infty$"; se invece $m \neq 0$, è d'uso dire che $y = mx + q$ è un "asintoto obliquo" per f a $\pm\infty$. Osserviamo che, nell'importante caso in cui f sia una funzione razionale fratta (ovvero $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ con p, q polinomi, di grado diciamo rispettivamente $r, s \geq 0$), il caso tipico in cui f ammette asintoto orizzontale è quando

$r = s$, ed il caso tipico in cui f ammette asintoto obliquo è quando $r = s + 1$.
Inoltre, se $c \in \mathbb{R}$ è un punto di accumulazione per A_f tale che $\lim_{x \longrightarrow c^-} f(x) = \infty$ (risp. tale che $\lim_{x \longrightarrow c^+} f(x) = \infty$) è d'uso anche dire che la retta $x = c$ è un "asintoto verticale sinistro" (risp. "destro") per f, e che è un "asintoto verticale bilatero" se è asintoto verticale sia sinistro che destro.

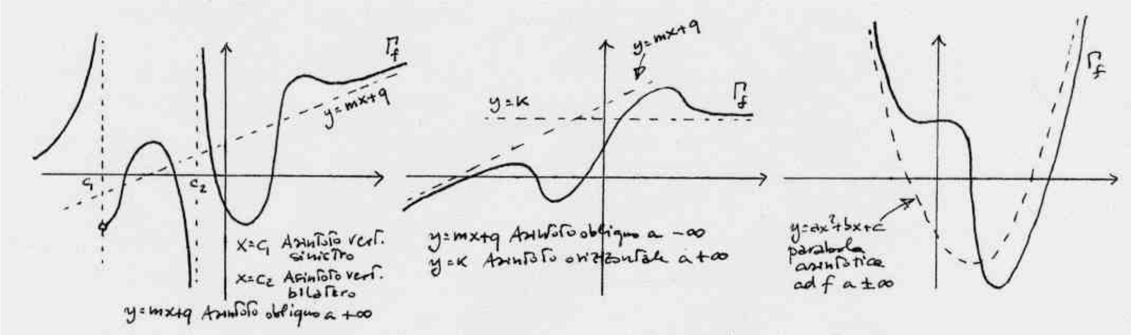

Figura 3.13: *Asintoti lineari e quadratici.*

Una volta compreso il caso delle rette, anche per i polinomi di grado superiore il problema diventa più comprensibile, e la funzione $\widetilde{f}(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ sarà asintoto per f a $\pm\infty$ se e solo se valgono le seguenti $n + 1$ condizioni:

- (c_n) $\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x^n}$ esiste finito e vale a_n;
- (c_{n-1}) $\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} \frac{f(x) - a_n x^n}{x^{n-1}}$ esiste finito e vale a_{n-1};

  $\vdots$
- (c_1) $\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} \frac{f(x) - a_n x^n - \cdots - a_2 x^2}{x}$ esiste finito e vale a_1;
- (c_0) $\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} (f(x) - a_n x^n - \cdots - a_2 x^2 - a_1 x)$ esiste finito e vale a_0.

Nella pratica, spesso si intendono e ricercano come "asintoti" solo le rette, accorgendosi occasionalmente di qualche asintoto polinomiale di grado superiore (ad esempio, tornando al caso della funzione razionale fratta $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ con p, q di grado rispettivamente $r, s \geq 0$, il caso tipico in cui f ammette come asintoto una funzione polinomiale di grado n è quando $r = s + n$). Si ponga attenzione al fatto che, come detto, la ricerca degli asintoti a $-\infty$ e a $+\infty$ deve essere *indipendente*. Ad esempio, la funzione $f(x) = e^x - \frac{x}{x-1}$ ha asintoto orizzontale $y = -1$ a $-\infty$ e non ammette asintoti a $+\infty$; la funzione $g(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ tende a 0^+ quando $x \to +\infty$ (e dunque $y = 0$ è asintoto orizzontale a $+\infty$) mentre $\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = -2$ e $\lim_{x \longrightarrow -\infty} \big(g(x) - (-2)x\big) = 0$, e perciò $y = -2x$ è asintoto obliquo a $-\infty$.
Infine, osserviamo che per gli asintoti (che diventano significativi solo verso $-\infty$ e/oppure verso $+\infty$) può essere utile calcolare le eventuali intersezioni del grafico di f con quello dell'asintoto $\widetilde{f}$, ovvero risolvere il sistema tra l'equazione dell'asintoto $y = \widetilde{f}(x)$ e quella della funzione $y = f(x)$.

(10) Si determinano i punti di A_f in cui f è derivabile (eventualmente solo a sinistra o solo a destra).

(11) I punti stazionari di f sono, per definizione, i punti di A_f in cui la derivata esiste (bilatera: dunque in particolare devono essere punti interni di A_f) ed è nulla: ovvero, sono le soluzioni di $f'(x) = 0$ nell'interno di A_f. Come si è visto, gli estremanti locali in cui f è derivabile si trovano tra questi punti, ma non è detto che un punto stazionario sia un estremante locale per f: esso potrebbe essere semplicemente un punto in cui la tangente al grafico ha pendenza nulla. Serve dunque determinare la natura dei punti stazionari di f, e ciò si fa solitamente nel passo che segue, in cui si studia la crescenza di f.

(12)-(13) Si vogliono determinare le "zone del dominio" in cui f è (strettamente) crescente oppure decrescente: a tal fine useremo correntemente la Proposizione 3.3.8 e tutti i punti della Proposizione 3.3.9, che invitiamo ad andare a rileggere con attenzione. Si tratta, nei casi più comuni in cui le funzioni sono derivabili dappertutto o quasi, di studiare il segno di f', ovvero la disequazione $f'(x) > 0$, ed applicare tali risultati: ciò permette anche, nella grande maggioranza dei casi, di determinare la natura dei punti stazionari. Diamo un paio di semplici esempi: se $f(x) = x^2$, si ha $f'(x) = 2x$ e dunque l'unico punto stazionario è $x_0 = 0$. La disequazione $f'(x) > 0$ è soddisfatta se e solo se $x > 0$, dunque per la Proposizione 3.3.9 f è strettamente decrescente (risp. strettamente crescente) se e solo se $x < 0$ (risp. per $x > 0$), e per la Proposizione 3.3.8 ciò mostra che il punto stazionario $x_0 = 0$ è un punto di minimo locale stretto, come ovviamente già sapevamo (è anche un minimo globale stretto). Se invece $g(x) = x^3$, poiché $g'(x) = 3x^2$ l'unico punto stazionario è ancora $x_0 = 0$, ma qui la disequazione $g'(x) > 0$ è soddisfatta per ogni $x \neq 0$, e dunque per la Proposizione 3.3.9(iv) f è strettamente crescente in tutto il suo dominio $\mathbb{R}$: pertanto $x_0 = 0$, non può essere né massimo né minimo locale.

(14) Se f è derivabile due volte, come vedremo anche la derivata seconda f'', in quanto derivata della derivata (e dunque, in quanto "studio della variazione della pendenza") dà interessanti informazioni sull'andamento di f. È dunque il caso di determinare i punti di A_f in cui f è derivabile due volte, calcolare tale derivata.

(15) I punti stazionari di f' sono i punti di derivabilità di f' in cui $f'' = (f')'$ esiste ed è nulla: ovvero, le soluzioni di $f''(x) = 0$. Si tratta dei punti in cui "l'andamento della pendenza della funzione diventa stazionario". Che cosa significa? Si tratta della nozione di *convessità*, che andiamo ad introdurre qui sotto.

(16) Si è già vista la nozione di *convessità* in uno spazio vettoriale: un sottoinsieme $D \subset \mathbb{R}^n$ è detto "convesso" se per ogni coppia di punti di D il segmento che li unisce è tutto contenuto in D, ovvero per ogni $\underline{x}_0, \underline{x}_1 \in D$ vale $[\underline{x}_0, \underline{x}_1] = \{\underline{x}_0 + t(\underline{x}_1 - \underline{x}_0) : t \in [0,1]\} \subset D$. Se $A \subset A_f$ è un intervallo, è allora del tutto naturale dire che f è *convessa* in A se il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ "sopragrafico di f" dato da $\Gamma_f^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq f(x)\}$ è convesso in $\mathbb{R}^2$: ora, poiché la retta passante per $(a, f(a))$ e $(b.f(b))$ è data da $y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, chiaramente la convessità di f in A equivale al richiedere che per ogni $a, b \in A$ con $a < b$ valga $f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ per ogni $x \in]a, b[$. Se tale disuguaglianza è stretta

(ovvero, se per ogni $a, b \in A$ con $a < b$ vale $f(x) < f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ per ogni $x \in]a, b[$) si dirà che f è *strettamente convessa* in A. Diciamo anche che, reciprocamente, f è detta *concava* o *strettamente concava* in A se valgono le disuguanze opposte.
Non è difficile osservare che "convessità" e "concavità" significano rispettivamente "pendenza crescente" e "pendenza decrescente": dunque appare naturale la seguente

Proposizione 3.4.2. *Sia $A \subset A_f$ un intervallo su cui f sia continua, e derivabile nell'interno $\dot{A}$. Allora f è convessa* (risp. strettamente convessa) *in A se e solo se f' è crescente* (risp. strettamente crescente) *in A.*
In particolare, se esiste $f'' = (f')'$ in $\dot{A}$, allora f è convessa (risp. strettamente convessa) *in A se e solo se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in \dot{A}$* (risp. $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in \dot{A}$ ed il sottoinsieme $\{x \in \dot{A} : f''(x) = 0\}$ di A è privo di punti interni)*,*
Enunciati analoghi valgono sostituendo "f convessa"*,* "f' crescente" *e* "$f'' \geq 0$" *rispettivamente con* "f concava"*,* "f' decrescente" *e* "$f'' \leq 0$"*.*

Dimostrazione. Per $a, b \in A$ con $a < b$ poniamo $g_{a,b} :]a, b[\to \mathbb{R}$ con $g_{a,b}(x) = f(x) - \Big(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\Big)$. Supponiamo f convessa, ovvero $g_{a,b}(x) \leq 0$ per ogni a, b ed $a < x < b$, e proviamo che $f'(a) \leq f'(b)$. Notiamo che si ha $g'_{a,b}(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$; se fosse $g'_{a,b}(a) > 0$ oppure $g'_{a,b}(b) < 0$, il teorema della permanenza del segno contradirrebbe subito l'ipotesi $g_{a,b} \leq 0$, e pertanto $g'_{a,b}(a) \leq 0$ e $g'_{a,b}(b) \geq 0$ ovvero $f'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b)$, da cui $f'(a) \leq f'(b)$ come richiesto. Se f' fosse crescente ma non strettamente, esisterebbero a, b tali che $g'_{a,b} \equiv 0$ e dunque tali che $g_{a,b}$ è costante, e ciò direbbe che f è convessa ma non strettamente.
Supponiamo ora che valga $f'(a) \leq f'(b)$ per ogni a, b con $a < b$, e proviamo che allora f è convessa. Presi dunque a, b con $a < b$, notiamo subito che, essendo f' crescente, anche $g'_{a,b} = f' - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ è crescente; inoltre, poiché $g_{a,b}(a) = g_{a,b}(b) = 0$, per il Teorema di Rolle esiste $c \in]a, b[$ tale che $g'_{a,b}(c) = 0$, e dunque $g'_{a,b}(x) \leq 0$ per $x \in]a, c]$ e $g'_{a,b}(x) \geq 0$ per $x \in [c, b[$, ovvero $g_{a,b}$ è decrescente in $]a, c]$ e crescente in $[c, b[$. Ma allora $0 = g_{a,b}(a) \geq g_{a,b}(x)$ per $x \in]a, c]$ e $g_{a,b}(x) \leq g_{a,b}(b) = 0$ per $x \in [c, b[$, ovvero $g_{a,b}(x) \leq 0$ per ogni $x \in]a, b[$, che è quanto si voleva. Se inoltre f' è strettamente crescente, le precedenti disuguaglianze sono strette e dunque f è strettamente convessa.
Le affermazioni fatte nel caso in cui esista $f'' = (f')'$ in $\dot{A}$ discendono allora subito dalla Proposizione 3.3.9(iv). Per la concavità i ragionamenti sono gli stessi. □

(17) Un punto $c \in A_f$ interno ad A_f si dirà *flesso* se f "cambia la convessità in c", ovvero se esiste $\delta > 0$ tale che f è convessa in $B_c^-(\delta) = [c - \delta, c]$ e concava in $B_c^+(\delta) = [c, c + \delta]$, o viceversa. I punti in cui f è derivabile due volte si trovano tra i punti stazionari di f' (perché, da quanto si è detto, deve essere $f''_-(c) \geq 0$ e $f''_+(c) \leq 0$ o viceversa). Una volta appurato che un punto c è un flesso per f, ai fini di un disegno accurato del grafico Γ_f può essere interessante determinare la retta tangente al grafico in $(c, f(c))$ (ovvero $y = f(c) + f'(c)(x - c)$), detta *tangente inflessionale*. Tornando per un attimo ai punti stazionari di f (cioè, tali che $f'(x) = 0$), è abbastanza chiaro che se essi non sono estremanti locali, essi saranno assai probabilmente dei flessi (detti magari "orizzontali" per distinguerli dagli altri, detti "obliqui"), anche se ciò non è sempre vero. Ad esempio, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data

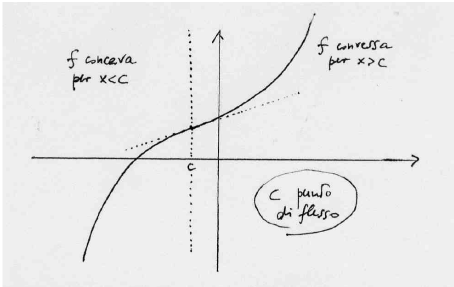

Figura 3.14: *Convessità e flessi.*

da $f(x) = x^2 \operatorname{sign} x \sin^2 \frac{1}{x}$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ è continua (perché $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$) e anzi derivabile (infatti, controllando in 0, vale $\lim_{\xi \to 0} \frac{f(\xi)-f(0)}{\xi - 0} = \lim_{\xi \to 0} |\xi| \sin^2 \frac{1}{\xi} = 0$ e dunque $f'(0) = 0$) anche se non di classe $\mathcal{C}^1$ (infatti $\lim_{x \to 0} f'(x)$ non esiste); il punto 0 è stazionario ma non è un estremante (perché $f(0) = 0$, $f(x) \leq 0$ per $x < 0$ e $f(x) \geq 0$ per $x > 0$), ma non è neppure un flesso (perché in ogni intorno a sinistra e a destra di 0 la convessità continua a cambiare).

(18) Si tratta di determinare la classe di regolarità globale di f, ed eventualmente le zone del dominio in cui la regolarità è migliore. Ad esempio, $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & (\text{se } x < 1) \\ -\frac{1}{\pi}\sin(\pi x) & (\text{se } x \geq 1) \end{cases}$ è di classe $\mathcal{C}^1$ (infatti nel punto 1 essa è derivabile perché $f'_-(1) = 1 = f'_+(1)$ e la funzione derivata $f'(x) = 2x - 1$ (per $x < 1$), $f'(1) = 1$ e $f'(x) = -\cos(\pi x)$ (per $x > 1$) è continua ma non è derivabile in 1 perché $f''_-(1) = 2$ mentre $f''_+(1) = 0$), mentre su $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ essa è chiaramente di classe $\mathcal{C}^\infty$.
Se si vuole, si può anticipare alcune di queste valutazioni di regolarità già al momento di parlare di continuità: ad esempio, nel caso in questione si poteva affermare senza dubbio già da subito che la funzione f era di classe $\mathcal{C}^\infty$ su $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, mentre per il comportamento in 1 bisognava attendere di aver calcolato le derivate sinistra e destra.

Prima di dare diversi esempi di studio dell'andamento di una funzione, sarà il caso di prepararsi nella mente i grafici delle funzioni più semplici, che saranno utili nel corso dello studio dell'andamento di funzioni più complesse. Daremo dunque per scontato che si sappiano tracciare e pensare senza difficoltà:

• I grafici delle funzioni elementari, ovvero delle potenze x^α, dell'esponenziale a^x, del logaritmo $\log_a x$, delle funzioni goniometriche $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ e delle loro inverse $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ e $\operatorname{arccotg} x$, del modulo $|x|$ e del modulo delle funzioni elementari, e delle traslate verticali delle funzioni elementari, cioè del tipo $f(x) + k$ con k costante reale.[39]

[39] Ovviamente, il grafico del modulo di una funzione $f(x)$ si ottiene dal grafico originale di f riflettendo rispetto all'asse x quelle parti di grafico che si trovano al di sotto dell'asse; ed il grafico della funzione $f(x) + k$ è quello di f traslato verticalmente di k.

• I grafici delle suddette funzioni, in cui la variabile x sia traslata (eventualmente col modulo): ad esempio, la funzione $\frac{1}{\sqrt{x+3}} = (x+3)^{-\frac{1}{2}}$, definita per $x \geq -3$, ha come grafico quello della funzione $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ traslato "a destra di -3", ovvero a sinistra di 3; mentre $\log|x-1|$ è definita per $x \neq 1$, ed il suo grafico è quello di $\log x$ prima traslato a destra di 1 e poi simmetrizzato rispetto alla retta $x = 1$. Si veda anche a pag. 52.

• I grafici delle funzioni lineari $y = mx + q$ e quadratiche $y = ax^2 + bx + c$, che sono rispettivamente rette e parabole.

• I grafici delle funzioni "affini" del tipo $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $c \neq 0$: si tratta, come si vede immediatamente, di iperboli con asintoti le rette $x = -\frac{d}{c}$ e $y = \frac{a}{c}$.

Esercizio. *Studiare l'andamento e tracciare il grafico delle seguenti funzioni:*

$$(\mathbf{1})\ f(x) = \frac{x^2}{x-1}; \quad (\mathbf{2})\ f(x) = \frac{x^3}{x+1}; \quad (\mathbf{3})\ f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x; \quad (\mathbf{4})\ f(x) = \log|x-1| + \sqrt{|x|}$$

$$(\mathbf{5})\ f(x) = \begin{cases} x^2+5x+6 & (\text{se } x < -1) \\ -x+1 & (\text{se } -1 < x < 0) \\ \sqrt{3+2x-x^2} & (\text{se } 0 \leq x \leq 3) \\ 0 & (\text{se } 3 < x < 5) \end{cases}; \qquad (\mathbf{6})\ f(x) = \sqrt{x^2-x}; \qquad (\mathbf{7})\ f(x) = x\log\frac{2x}{x-1};$$

$$(\mathbf{8})\ f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x-\sqrt{3}}{x-3}; \quad (\mathbf{9})\ f(x) = \log(1-\operatorname{tg} x); \quad (\mathbf{10})\ f(x) = \operatorname{arctg}\frac{\log|x-2|}{x}; \quad (\mathbf{11})\ f(x) = \frac{(x-1)^2}{\log|x|};$$

$$(\mathbf{12})\ f(x) = \operatorname{arctg}\frac{|x|}{x+2} + \frac{x}{2}; \quad (\mathbf{13})\ f(x) = \frac{x-|x-2|}{2x+|x+1|}; \quad (\mathbf{14})\ f(x) = \log\left(1+e^{\frac{x^2+1}{x}}\right); \quad (\mathbf{15})\ f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}.$$

Risoluzione. Per ogni funzione seguiremo lo schema proposto all'inizio del presente paragrafo (dominio naturale, eventuale periodicità,...).

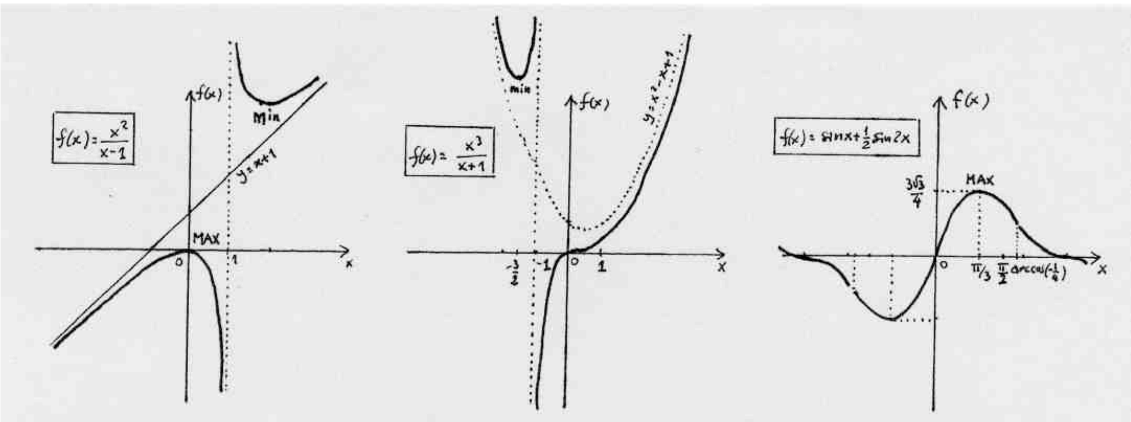

Figura 3.15: *Grafico di* **(1)** $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, **(2)** $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$, **(3)** $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$.

(1) $[f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, vedi Figura 3.15(a)] Il dominio è $A_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; la funzione non ha periodicità e parità (infatti $f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)-1} = -\frac{x^2}{x+1}$ in generale è diversa sia da $f(x)$ che da $-f(x)$); essa è continua in tutto il dominio (perché ottenuta tramite operazioni e/o composizione da funzioni continue, cosa che non ripeteremo più in futuro); i limiti notevoli sono $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \mp\infty$, $\lim_{x\to 1^\mp} f(x) = \mp\infty$; l'equazione $f(x) = 0$ dà $x = 0$, e dunque $f(0) = 0$; la disequazione $f(x) > 0$ dà $x > 1$, e dunque $f(x) < 0$ per $x < 1$ e $x \neq 0$; come visto, $x = 1$ è asintoto verticale bilatero e non ci sono asintoti orizzontali, mentre $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ e $\lim_{x\to\mp\infty}(f(x) - (1)x) = 1$ da cui la retta $y = x + 1$ è asintoto obliquo a $\pm\infty$, mentre $f(x) = x + 1$ non ha soluzioni e dunque non vi sono intersezioni tra l'asintoto e Γ_f. La funzione è derivabile in tutto il dominio (ancora, perché ottenuta tramite operazioni e/o composizione da funzioni derivabili, cosa che non ripeteremo più in futuro) con derivata $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$; si ottengono dunque i punti stazionari $x = 0$ e $x = 2$. La disequazione $f'(x) > 0$ vale se e solo se $x < 0$ oppure $x > 2$: pertanto f è strettamente crescente in $\mathbb{R}_{<0}$ e $\mathbb{R}_{>2}$ e strettamente decrescente in $]0, 2[$, da cui si ricava che $x = 0$ è un punto di massimo locale stretto (con valore $f(0) = 0$) e $x = 2$ un punto di minimo locale stretto (con valore $f(2) = 4$). La funzione è derivabile ulteriormente in tutto il dominio con derivata seconda $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$: vale $f''(x) \neq 0$, e $f''(x) \gtrless 0$ se e solo se $x \gtrless 1$, dunque f è strettamente concava per $x < 1$, strettamente convessa per $x > 1$ e priva di flessi. Infine è chiaro che f è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto il dominio.

(2) [$f(x) = \frac{x^3}{x+1}$, vedi Figura 3.15(b)] Il dominio è $A_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ e non vi sono periodicità e parità; la funzione è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto il dominio. I limiti notevoli sono $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to -1^\mp} f(x) = \pm\infty$; l'equazione $f(x) = 0$ dà $x = 0$, e dunque $f(0) = 0$; la disequazione $f(x) > 0$ è soddisfatta se e solo se $x < -1$ oppure $x > 0$, e dunque $f(x) < 0$ per $-1 < x < 0$. $x = -1$ è asintoto verticale bilatero e non ci sono asintoti orizzontali e obliqui; tuttavia, essendo f una funzione razionale fratta col grado del numeratore superiore di 2 a quello del denominatore, è sensato attendersi l'esistenza di un asintoto quadratico $y = ax^2 + bx + c$. Si ha infatti $a = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 1$, $b = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)-x^2}{x} = -1$ e $c = \lim_{x\to\mp\infty}(f(x) - x^2 + x) = 1$, da cui l'asintoto $y = x^2 - x + 1$, privo di intersezioni con f. La derivata è $f'(x) = \frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$; si ottengono dunque i punti stazionari $x = -\frac{3}{2}$ e $x = 0$. La disequazione $f'(x) > 0$ vale se e solo se $x > -\frac{3}{2}$ (e $x \neq -1$): pertanto f è strettamente crescente in $\mathbb{R}_{>-\frac{3}{2}} \setminus \{-1\}$ e strettamente decrescente in $\mathbb{R}_{<-\frac{3}{2}}$, da cui si ricava che $x = -\frac{3}{2}$ è un punto di minimo locale stretto (con valore $f(-\frac{3}{2}) = \frac{27}{4} \sim 6,7$) mentre $x = 0$ non è un punto di estremo locale. Vale poi $f''(x) = \frac{2x(x^2+3x+3)}{(x-1)^3}$, perciò $f''(x) = 0$ se e solo se $x = 0$ e $f''(x) > 0$ (ovvero f strettamente convessa) se e solo se $x < -1$ oppure $x > 0$: pertanto si ha un flesso (orizzontale) in $x = 0$.

(3) [$f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$, vedi Figura 3.15(c)] La funzione è definita e di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto $\mathbb{R}$, e periodica di periodica 2π; inoltre essa è dispari. Pertanto sarà sufficiente studiarla su $[-\pi, \pi] \cap \mathbb{R}_{\geq 0} = [0, \pi]$. La funzione è limitata, perché $|f(x)| = |\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x| \leq |\sin x| + \frac{1}{2}|\sin 2x| \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Non vi sono limiti notevoli; notiamo che vale $f(x) = \sin x + \sin x \cos x = \sin x(1 + \cos x)$, e pertanto $f(x) = 0$ se e solo se $\sin x$ oppure $\cos x = -1$, cioè $x = 0$ o $x = \pi$, e $f(x) > 0$ in $]0, \pi[$. La derivata è $f'(x) = \cos x + \cos 2x = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$; dunque $f'(x) = 0$ per $\cos x = -1$ (ovvero $x = \pi$) oppure $\cos x = \frac{1}{2}$ (ovvero $x = \frac{\pi}{3}$), e $f'(x) > 0$ per $\cos x > \frac{1}{2}$, ovvero $0 \leq x < \frac{\pi}{3}$, e ne ricaviamo che $x = \frac{\pi}{3}$ è un punto di massimo locale (con $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \sim 1,3$) mentre $x = \pi$ non è un estremante locale. Si ha infine $f''(x) = -\sin x + 2\sin 2x = -\sin x(4\cos x + 1)$, da cui $f''(x) = 0$ se e solo se $\sin x = 0$ (ovvero $x = 0, \pi$) oppure $\cos x = -\frac{1}{4}$ (ovvero $x = \alpha := \arccos(-\frac{1}{4}) \sim 1,82$), e, essendo $\sin x > 0$ in $]0, \pi[$, si ha $f''(x) > 0$ (ovvero f è strettamente convessa) se e solo se $\cos x < -\frac{1}{4}$, cioè $\alpha < x < \pi$. Pertanto $x = 0$, $x = \alpha$ e $x = \pi$ sono tutti flessi. In $x = 0$ e $x = \alpha$ si hanno flessi obliqui, con $f(0) = 0$, $f(\alpha) = \sqrt{1 - (-\frac{1}{4})^2}(1 + (-\frac{1}{4})) = \frac{3\sqrt{15}}{16} \sim 0,72$ e tangenti inflessionali di pendenze $f'(0) = 2$ e $f'(\alpha) = 2(-\frac{1}{4})^2 + (-\frac{1}{4}) - 1 = -\frac{9}{8} \sim -1,1$; invece in $x = \pi$ si ha un flesso orizzontale, con $f(\pi) = 0$. Per disegnare il grafico con maggior cura, naturalmente si può calcolare f anche in altri punti scelti: ad esempio, $f(\frac{\pi}{2}) = 1$.

(4) [$f(x) = \log|x - 1| + \sqrt{|x|}$, vedi Figura 3.16(a)] Il dominio è dato dalle condizioni $|x - 1| > 0$ e $|x| \geq 0$, ovvero $x \neq 1$; la funzione è di classe $\mathcal{C}^\infty$ in $\mathbb{R}_{<0}$, in $]0, 1[$ e in $\mathbb{R}_{>0}$, ed è di certo continua anche in $x = 0$, in cui vale $f(0) = 0$. Non ci sono periodicità né parità. I limiti notevoli sono facilmente $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 1^\mp} f(x) = -\infty$. Per determinare i punti in cui $f(x) = 0$ e $f(x) > 0$, in questo caso è conveniente usare il metodo di *confronto dei grafici*: infatti $f(x) \geq 0$ se e solo se $\log|x-1| \geq -\sqrt{|x|}$, e si ricava l'esistenza di due punti a, b con $0 < a < 1 < b < 2$ tali che $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$, $x = a$ oppure $x = b$, e $f(x) > 0$

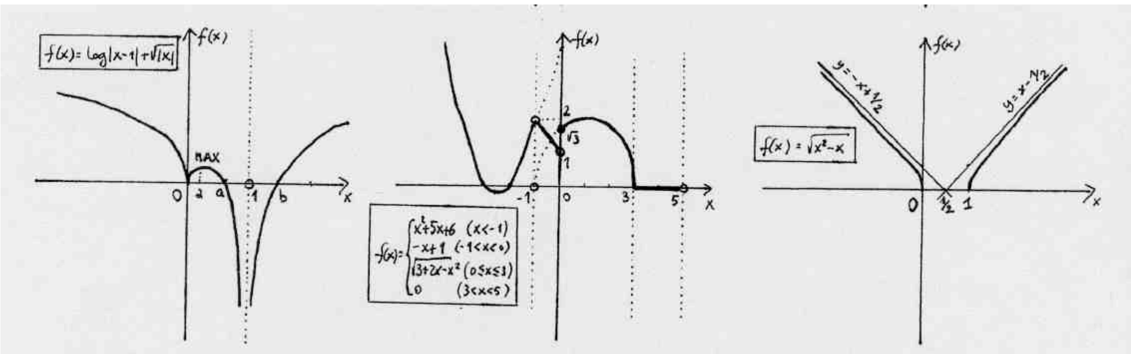

Figura 3.16: *Grafico di* **(4)** $f(x) = \log|x-1| + \sqrt{|x|}$, **(5)** $f(x) = x^2 + 5x + 6$ *(se* $x < -1$*)*, $-x+1$ *(se* $-1 < x < 0$*)*, $\sqrt{3+2x-x^2}$ *(se* $0 \le x \le 3$*)*, 0 *(se* $3 < x < 5$*)*, **(6)** $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$.

se e solo se $x < 0$, $0 < x < a$ oppure $x > b$. La retta $x = 1$ è un asintoto verticale bilatero, mentre non vi sono asintoti lineari. Per la derivabilità ci resta solo il dubbio in $x = 0$. La cosa più semplice è calcolare la derivata negli altri punti, e vedere se i suoi limiti destro e sinistro per $x \to 0$: infatti (vedi Proposizione 3.3.6) se esistono finiti, essi saranno rispettivamente $f'_+(0)$ e $f'_-(0)$, e se invece uno o entrambi esistono ma sono infiniti allora la corrispondente derivata non esiste. In effetti, per $x \neq 0, 1$ si ha $f'(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{\operatorname{sign} x}{2\sqrt{|x|}}$ e dunque $\lim_{x\to\mp} f'(x) = \mp\infty$, da cui ricaviamo che f è continua ma non derivabile in 0. Ora, al fine di studiare $f'(x) \ge 0$ notiamo che $f'(x) < 0$ per ogni $x < 0$: perciò possiamo supporre che sia $x > 0$, e dunque $f'(x) = \frac{x+2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}(x-1)}$. Ponendo $\sqrt{x} = t > 0$, si deve studiare $\frac{t^2+2t-1}{2t(t^2-1)} \ge 0$, che equivale a $\frac{t^2+2t-1}{t-1} \ge 0$: vale $= 0$ se e solo se $t^2 + 2t - 1 = 0$, ovvero $t = \sqrt{2} - 1$ da cui $x = \alpha := 3 - 2\sqrt{2} \sim 0,17$, e > 0 se e solo se $0 < t < \sqrt{2} - 1$ oppure $t > 1$, ovvero se e solo se $0 < x < \alpha$ oppure $x > 1$, ovvero per $x > 0$ la funzione f è strettamente crescente in $]0, \alpha[$ e in $\mathbb{R}_{>1}$ e strettamente decrescente in $]\alpha, 1[$, oltreché, come visto, in $\mathbb{R}_{<0}$. Pertanto $x = \alpha = 3 - 2\sqrt{2}$ è un punto di massimo locale (con $f(\alpha) \sim 0,22$); inoltre, sebbene f non vi sia derivabile, dalle considerazioni fatte possiamo anche dire che 0 è un punto di minimo locale (con $f(0) = 0$). Derivando ulteriormente, si ha $f''(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{\operatorname{sign} x}{2}(-\frac{1}{2})|x|^{-\frac{3}{2}} \operatorname{sign} x = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{4|x|\sqrt{|x|}} < 0$ per ogni $x \neq 0, 1$, dunque f è strettamente concava.

(5) $[f(x) = x^2 + 5x + 6$ (se $x < -1$), $-x + 1$ (se $-1 < x < 0$), $\sqrt{3 + 2x - x^2}$ (se $0 \le x \le 3$), 0 (se $3 < x < 5$), vedi Figura 3.16(b)$]$ La funzione è definita a tratti, e notiamo che in ciascuno di questi tratti la relativa definizione ha senso (serve solo controllare $\sqrt{3 + 2x - x^2}$, in cui il radicando $3 + 2x - x^2$ è ≥ 0 se e solo se $x \in [-1, 3]$, intervallo che contiene $[0, 3]$): dunque il dominio è definito d'autorità come $\mathbb{R}_{<-1} \cup]-1, 0[\cup [0, 3] \cup]3, 5[= \mathbb{R}_{<5} \setminus \{-1\}$. La funzione è certamente di classe $\mathcal{C}^\infty$ in $\mathbb{R}_{<5} \setminus \{-1, 0, 3\}$. Si noti che f non è definita in -1 e dunque è privo di senso chiedersi se f sia ivi continua o no; tuttavia, essendo $\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^+} f(x) = 2$, si potrebbe prolungare f per continuità ponendo $f(-1) := 2$. Invece f è definita in 0 come $f(0) = \sqrt{3}$, però $\lim_{x\to0^-} f(x) = 1$ è diverso da $f(0) = \lim_{x\to0^+} f(x) = \sqrt{3}$ e dunque f è discontinua in 0. Infine, f è definita in 3 come $f(3) = 0$, ed è ivi continua essendo $\lim_{x\to3^-} f(x) = f(3) = \lim_{x\to3^+} f(x) = 0$. Ricapitolando, f è continua in tutto il dominio $\mathbb{R}_{<5} \setminus \{-1\}$ tranne che in 0. Per i limiti notevoli abbiamo ancora $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Vale $f(x) = 0$ se e solo se $x = -3$, $x = -2$ e $x \ge 0$, e $f(x) > 0$ se e solo se $x < -3$, $-2 < x < -1$ e $x > -1$. In $\mathbb{R}_{<5} \setminus \{-1, 0, 3\}$ la derivata $f'(x)$ vale $2x + 5$ (per $x < -1$), -1 (per $-1 < x < 0$), $\frac{1-x}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ (per $0 < x < 3$) e 0 (per $x > 3$); resta da vedere se f sia derivabile anche in $x = 3$, ma ciò non è vero perché $\lim_{x\to3^-} f'(x) = -\infty$ (ricordare sempre la Proposizione 3.3.6). La derivata è nulla per $x = -\frac{5}{2}$, $x = 1$ e $x > 0$, strettamente positiva (e dunque f strettamente crescente) se e solo se $-\frac{5}{2} < x < -1$, $0 < x < 1$, e strettamente negativa (e dunque f strettamente decrescente) se e solo se $x < -\frac{5}{2}$, $-1 < x < 0$ e $1 < x < 3$: ne ricaviamo che $x = -\frac{5}{2}$ è un punto di minimo locale stretto (con $f(-\frac{5}{2}) = -\frac{1}{4}$) e $x = 1$ un punto di massimo locale stretto (con $f(1) = 2$). Per i punti $x = 0, 3$ bisogna esaminare in dettaglio: vale $f(0) = \sqrt{3}$, ed in ogni intorno di

0 vi sono punti in cui $f(x) < f(0)$ (si ricordi che $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$) ed altri in cui $f(x) > f(0)$ (perché $f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$ e f è strettamente crescente in $0 < x < 1$): dunque 0 non è un estremante locale per f. Invece $x = 3$ è un punto di minimo locale non stretto, perché $f(x) > 0$ in un intorno sinistro di 3 e $f(x) \geq 0$ per $x \geq 3$. La funzione è strettamente convessa in $\mathbb{R}_{<1}$, strettamente concava in $]0, 3[$ e lineare in $]-1, 0[$ e $\mathbb{R}_{>3}$.

(6) $[f(x) = \sqrt{x^2 - x}$, vedi Figura 3.16(c)] Il dominio della funzione è definito da $x^2 - x \geq 0$, ovvero è $\mathbb{R}_{\leq 0} \cup \mathbb{R}_{\geq 1}$; essa è ivi continua, e $\mathcal{C}^\infty$ nel suo interno. Non vi sono periodicità o parità. I limiti notevoli sono $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = +\infty$, vale $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0, 1$, ed è $f(x) > 0$ in tutti gli altri punti del suo dominio. Si noti che vale $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{x} = \mp 1$, mentre $\lim_{x\to\mp\infty}(f(x) - (\mp 1)x) = \lim_{x\to\mp\infty}(\sqrt{x^2 - x} \pm x) = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2-x} \mp x} = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{-1}{\operatorname{sign} x\sqrt{1-\frac{1}{x}} \mp 1} = \pm\frac{1}{2}$, da cui $y = \mp x \pm \frac{1}{2}$ è asintoto obliquo in $\mp\infty$. La derivata $f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$ non è mai nulla nel dominio, ed è $f'(x) > 0$ per $x > 1$ e $f'(x) < 0$ per $x < 0$: dunque f è strettamente decrescente per $x < 0$ e strettamente crescente per $x > 1$. La derivata seconda $f''(x) = -\frac{1}{4}(x^2 - x)^{-\frac{3}{2}}$ è sempre < 0 nel dominio, e dunque f è strettamente concava. (Si osservi che la funzione diventa pari col cambio di variabili $X = x - \frac{1}{2}$, ovvero $x = X + \frac{1}{2}$: infatti essa diventa $F(X) = f(X + \frac{1}{2}) = \sqrt{(X + \frac{1}{2})^2 - (X + \frac{1}{2})} = \sqrt{X^2 - \frac{1}{4}}$.)

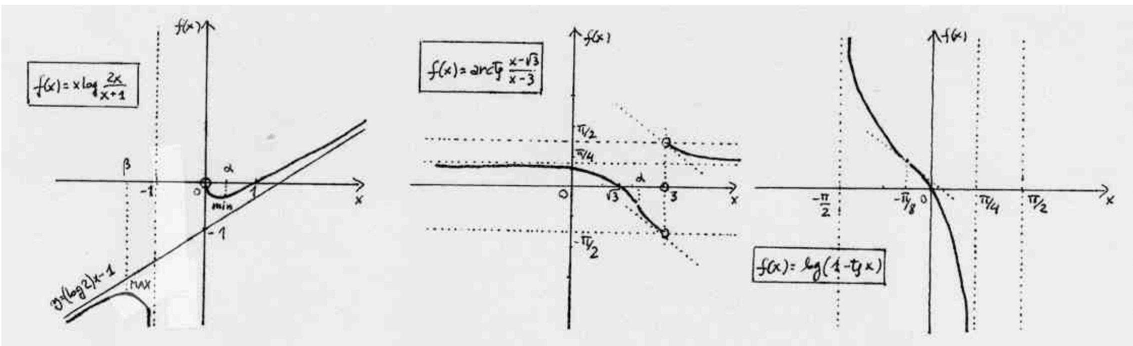

Figura 3.17: *Grafico di* **(7)** $f(x) = x \log \frac{2x}{x+1}$, **(8)** $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x-\sqrt{3}}{x-3}$, **(9)** $f(x) = \log(1 - \operatorname{tg} x)$.

(7) $[f(x) = x \log \frac{2x}{x+1}$, vedi Figura 3.17(a)] Il dominio è dato dalla condizione $\frac{2x}{x+1} > 0$, ovvero $x < -1$ oppure $x > 0$; in esso la funzione è $\mathcal{C}^\infty$, e non ci sono periodicità o parità. I limiti notevoli sono $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \mp\infty$, $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^-$.[40] Vale $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{x} = \log 2$ e $\lim_{x\to\mp\infty}(f(x) - (\log 2)x) = -1$;[41] pertanto $y = (\log 2)x - 1$ è un asintoto obliquo per f a $\pm\infty$, privo di intersezioni con f.[42] Vale $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$ oppure $\frac{2x}{x+1} = 1$, ovvero $x = 1$; studiando poi $f(x) > 0$, si ha $\log \frac{2x}{x+1} > 0$ se e solo se $\frac{2x}{x+1} > 1$ ovvero se e solo se $x < -1$ oppure $x > 1$, da cui $f(x) > 0$ se e solo se $x > 1$. La derivata è $f'(x) = \log \frac{2x}{x+1} + \frac{1}{x+1}$; per semplificare i conti poniamo $t = \frac{2x}{x+1}$ ovvero $x = -\frac{t}{t-2} =: \varphi(t)$ e dunque $f'(x) = \log t + 1 - \frac{t}{2}$. Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $\log t = \frac{t}{2} - 1$, e ciò vale

[40] Il limite è della forma $0 \cdot \infty$: ponendo $\frac{2x}{x+1} = t$, esso diventa $\lim_{t\to 0^+} \frac{t \log t}{t+2} = 0^-$ (basta ricordare che $\lim_{t\to 0^+} t \log t = 0^-$). Oppure, scrivendolo nella forma $\lim_{x\to 0^+} \frac{\log\left(\frac{2x}{x+1}\right)}{1/x}$ e applicando de l'Hôpital, esso diventa $\lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{x}{x+1}\right) = 0^+$.

[41] Infatti vale $\lim_{x\to\mp\infty}(x \log \frac{2x}{x+1} - (\log 2)x) = \lim_{x\to\mp\infty} x \log \frac{x}{x+1} = \lim_{x\to\mp\infty} x \log\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\mp\infty} x(-\frac{1}{x}) = -1$ (usando il fatto che $t = \frac{1}{x} \to 0$ e lo sviluppo asintotico di $\log(1 + t)$); oppure, meno elegantemente, si può applicare de l'Hôpital.

[42] Da $f(x) = (\log 2)x - 1$ si ricava $\log(1 + t) = t$ per $t = \frac{1}{x} > 0$: ma le funzioni $\log(1 + t)$ e t si intersecano solo se $t = 0$, e ciò è impossibile.

(usando il confronto grafico) se e solo se $t = a, b$ con $0 < a < 1$ e $5 < b < 6$, ovvero (osservando il grafico di $\varphi(t)$) se e solo se $x = \alpha := \frac{a}{2-a}$ oppure $x = \beta := -\frac{b}{b-2}$ con $\frac{1}{5} < \alpha < \frac{1}{2}$ e $-\frac{5}{3} < \beta < -\frac{3}{2}$; e $f'(x) > 0$ se e solo se $\log t > \frac{t}{2} - 1$, ovvero se e solo se $a < t < b$, ovvero se e solo se $x < \beta$ oppure $x > \alpha$. Ciò dice che $x = \beta$ (risp. $x = \alpha$) è un punto di massimo (risp. minimo) relativo stretto; inoltre, essendo $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$, ricordando l'espressione di $f'(x)$ si ricava $f(\beta) = \beta \log \frac{2\beta}{\beta+1} = \beta(-\frac{1}{\beta+1}) = -\frac{\beta}{\beta+1} =: \psi(\beta)$ (e dunque, essendo $-\frac{5}{3} < \beta < -\frac{3}{2}$, si ricava $-3 = \psi(-\frac{3}{2}) < f(\beta) < \psi(-\frac{5}{3}) = -\frac{5}{2}$) e $f(\alpha) = \psi(\alpha)$ (e dunque, essendo $\frac{1}{5} < \alpha < \frac{1}{2}$, si ricava $-\frac{1}{3} = \psi(\frac{1}{2}) < f(\alpha) < \psi(\frac{1}{5}) = -\frac{1}{6}$). Essendo $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0^-$ (finito), per sapere con quale pendenza il grafico parte a destra di $x = 0$ è anche interessante calcolare $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty$ (dunque il grafico partirà con pendenza "verticale in basso"). Infine, si calcola $f''(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}$, e ciò mostra che f è priva di flessi ed è strettamente concava (risp. strettamente convessa) per $x < -1$ (risp. per $x > 0$).

(8) [$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x-\sqrt{3}}{x-3}$, vedi Figura 3.17(b)] Il dominio è $\mathbb{R} \setminus \{3\}$; la funzione non ha periodicità o parità, ed è $\mathcal{C}^\infty$ in tutto il suo dominio; inoltre, f è limitata perché $|f(x)| \leq \frac{\pi}{2}$ per ogni x nel dominio. I limiti notevoli sono $\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}^{\mp}$ (dunque $y = \frac{\pi}{4}$ è asintoto orizzontale a $\mp\infty$, privo di intersezioni con f) e $\lim_{x \to 3^\mp} f(x) = \pm\frac{\pi}{2}^{\pm}$; vale $f(x) = 0$ per $x = \sqrt{3}$ e $f(0) = \operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{\pi}{6}$, ed $f(x) > 0$ se e solo se $\frac{x-\sqrt{3}}{x-3} > 0$, ovvero $x < \sqrt{3} \sim 1,7$ oppure $x > 3$. La derivata è $f'(x) = -\frac{3-\sqrt{3}}{2(x^2-(3+\sqrt{3})x+6)}$: dunque $f'(x) < 0$ per ogni $x \neq 3$, ovvero f è strettamente decrescente in $\mathbb{R}_{<3}$ ed in $\mathbb{R}_{>3}$. Poiché i limiti di f per $x \to 3^\mp$ sono finiti, è interessante calcolare $\lim_{x \to 3^\mp} f'(x) = -\frac{3-\sqrt{3}}{6} \sim -0,21$; si ha inoltre $f'(\sqrt{3}) = -\frac{3+\sqrt{3}}{6} \sim -0,79$. La derivata seconda è $f''(x) = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \frac{2x-(3+\sqrt{3})}{(x^2-(3+\sqrt{3})x+6)^2}$; vale $f''(x) = 0$ per $x = \alpha := \frac{3+\sqrt{3}}{2} \sim 2,37$, e $f''(x) > 0$ (ovvero, f strettamente convessa) per $x > \alpha$: dunque $x = \alpha$ è un flesso, con $f(\alpha) = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ e tangente inflessionale di pendenza $f'(\alpha) = -\frac{3+\sqrt{3}}{3} \sim -1,58$.

(9) [$f(x) = \log(1 - \operatorname{tg} x)$, vedi Figura 3.17(c)] Il dominio è dato dalle condizioni $1 - \operatorname{tg} x > 0$ per il logaritmo (ovvero $\operatorname{tg} x < 1$, che dà $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$) e $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ per la tangente, ovvero $A_f = \{-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. La funzione è $\mathcal{C}^\infty$ in tutto il suo dominio e periodica di periodo π, e la studiamo dunque in $A_f \cap [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}[$. I limiti notevoli sono $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to -\frac{\pi}{4}^-} f(x) = -\infty$; vale $f(x) = 0$ se e solo se $1 - \operatorname{tg} x = 1$, ovvero se e solo se $x = 0$, e $f(x) > 0$ se e solo se $1 - \operatorname{tg} x > 1$, ovvero se e solo se $x < 0$. La derivata è $f'(x) = \frac{1}{1-\operatorname{tg} x}(-\frac{1}{\cos^2 x}) = -\frac{1}{\cos x(\cos x - \sin x)} < 0$ su tutto il dominio, in cui f è perciò strettamente decrescente. La derivata seconda è $f''(x) = -\frac{\sin 2x + \cos 2x}{\cos^2 x(\cos x - \sin x)^2}$, che si annulla quando $\sin 2x + \cos 2x = 0$ ovvero quando $\operatorname{tg} 2x = -1$, che dà $2x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, da cui $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k}{2}\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$); di questi valori, solo $-\frac{\pi}{8}$ sta in $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}[$. Vale infine $f''(x) > 0$ (ovvero, f strettamente convessa0 se e solo se $\sin 2x + \cos 2x < 0$, ovvero se e solo se $-\frac{5\pi}{4} + 2k\pi < 2x < -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, cioè $-\frac{5\pi}{8} + k\pi < x < -\frac{\pi}{8} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, dunque per $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{8}$ nel nostro dominio; pertanto $x = -\frac{\pi}{8}$ è un flesso, con (usando le formule di bisezione) $f(-\frac{\pi}{8}) = \log(1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}) = \log \sqrt{2} = \frac{1}{2} \log 2 \sim 0,35$ e $f'(-\frac{\pi}{8}) \sim -0,83$.

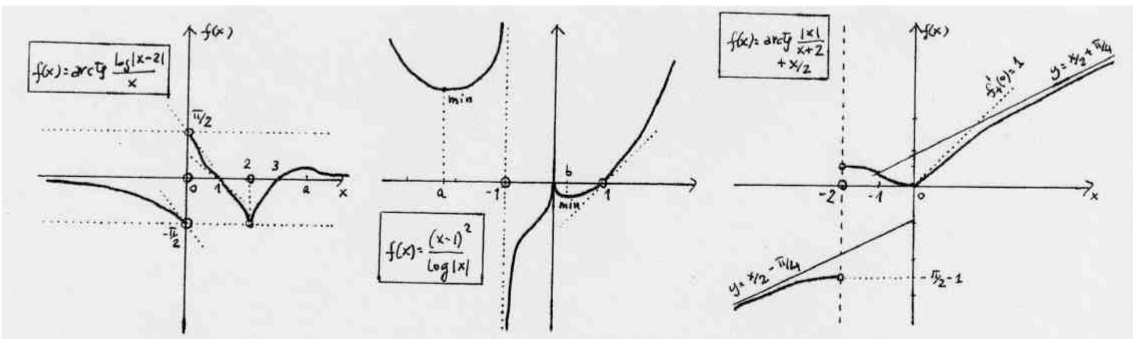

Figura 3.18: *Grafico di* **(10)** $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{\log|x-2|}{x}$, **(11)** $f(x) = \frac{(x-1)^2}{\log|x|}$, **(12)** $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{|x|}{x+2} + \frac{x}{2}$.

(10) $[f(x) = \text{arctg}\,\frac{\log|x-2|}{x}$, vedi Figura 3.18(a)] Il dominio di f è dato da $|x-2| > 0$ e $x \neq 0$, ovvero $\mathbb{R} \setminus \{0,2\}$; essa non è periodica né ha parità, ed è di classe $\mathcal{C}^\infty$ nel dominio. Limiti notevoli sono $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = 0^\mp$ (infatti l'argomento dell'arco-tangente è infinitesimo), $\lim_{x\to 0^\mp} f(x) = \mp\frac{\pi}{2}$, e $\lim_{x\to 2^\mp} f(x) = -\frac{\pi}{2}$. La funzione è limitata, perché per ogni x nel dominio vale $|f(x)| < \frac{\pi}{2}$. Si ha $f(x) = 0$ per $\log|x-2| = 0$, ovvero per $|x-2| = 1$, cioè $x-2 = \pm 1$, cioè $x = 1$ oppure $x = 3$; invece $f(x) > 0$ vale se e solo se $\frac{\log|x-2|}{x} > 0$; il numeratore è > 0 per $|x-2| > 1$, ovvero per $x-2 < -1$ oppure $x-2 > 1$, ovvero per $x < 1$ oppure $x > 3$, mentre il denominatore è > 0 per $x > 0$; riassumendo, $f(x) > 0$ nel dominio se e solo se $0 < x < 1$ oppure $x > 3$. Come visto, $y = 0$ è asintoto orizzontale a $\mp\infty$. La derivata è $f'(x) = \frac{\frac{x}{x-2} - \log|x-2|}{x^2 + \log^2|x-2|}$. Usando un confronto grafico tra le funzioni $\frac{x}{x-2}$ e $\log|x-2|$, individuiamo un $6 < a < 7$ tale che $\frac{x}{x-2} \geq \log|x-2|$ se e solo se $2 < x < a$, e dunque $f'(x) = 0$ se e solo se $x = a$ e $f'(x) > 0$ (ovvero f strettamente crescente) se e solo se $2 < x < a$ e $f'(x) < 0$ (ovvero f strettamente decrescente) se e solo se $x < 0$, $0 < x < 2$ o $x > a$: ne ricaviamo che $x = a$ è un massimo locale stretto, con $f(a) = \text{arctg}\,\frac{\log|a-2|}{a} = \text{arctg}\,\frac{\frac{a}{a-2}}{a} = \text{arctg}\,\frac{1}{a-2} = \text{arccotg}(a-2)$, e dunque $0,2 \sim \text{arccotg}\,5 < f(a) < \text{arccotg}\,4 \sim 0,25$. È interessante anche calcolare $\lim_{x\to 0^\mp} f'(x) = -\frac{1}{\log 2} \sim -1,44$ e $\lim_{x\to 2^\mp} f'(x) = \mp\infty$. Non calcoliamo la derivata seconda, che ha un'espressione troppo complicata; notiamo tuttavia che $f'(1) = -\frac{1}{2}$, e perciò, essendo questo valore maggiore sia di $f'_+(0)$ che del limite $\lim_{x\to 2^-} f'(x) = -\infty$, esisteranno di certo almeno due flessi tra 0 e 2.

(11) $[f(x) = \frac{(x-1)^2}{\log|x|}$, vedi Figura 3.18(b)] Il dominio è dato da $|x| > 0$ (cioè $x \neq 0$) e $\log|x| \neq 0$ (cioè $|x| \neq 1$), ovvero $\mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$. La funzione è di classe $\mathcal{C}^\infty$ nel dominio, non è periodica né ha parità; i suoi limiti notevoli sono $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = +\infty$,[43] $\lim_{x\to -1^\mp} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to -1^\mp} f(x) = 0^-$ e $\lim_{x\to 1^\mp} f(x) = 0^\mp$.[44] La funzione non si annulla mai (tutt'al più, come visto, potrebbe essere prolungata per continuità in $x = 1$ col valore 0); essa è > 0 se e solo se $\log|x| > 0$, ovvero se e solo se $|x| > 1$, cioè per $x < -1$ oppure $x > 1$. Si ha $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$, dunque essa non ammette asintoti obliqui. La derivata vale $f'(x) = 2\frac{x-1}{\log^2|x|}\left(\log|x| - \frac{x-1}{2x}\right)$; Un confronto grafico tra le funzioni $\log|x|$ e $\frac{x-1}{2x}$ ci mostra due punti $-3 < a < -2$ e $0 < b < 1$ tali che $\log|x| \geq \frac{x-1}{2x}$ se e solo se $x \leq a$, $0 < x \leq b$ oppure $x \geq 1$; l'altro fattore in cui il segno può cambiare è $x-1$, che è > 0 per $x > 1$: riassumendo, $f'(x) = 0$ se e solo se $x = a, b$; $f'(x) > 0$ (ovvero f strettamente crescente) se e solo se $a < x < -1$, $-1 < x < 0$, $b < x < 1$ e $x > 1$, mentre $f'(x) < 0$ (ovvero f strettamente decrescente) se e solo se $x < a$ e $0 < x < b$. Ne deduciamo che $x = a$ e $x = b$ sono punti di minimo locale stretto con $f(a) = \frac{(a-1)^2}{\log|a|} = (a-1)^2\frac{2a}{a-1} = 2a(a-1) =: \psi(a)$ (pertanto $12 = \psi(-2) < f(a) < \psi(-3) = 24$; in realtà $(a; f(a)) \sim (-2,09; 12,95)$) e $f(b) = 2b(b-1) = \psi(b)$ (pertanto $-\frac{1}{2} < f(b) < 0$; in realtà $(b; f(b)) \sim (0,28; -0,41)$). Calcoliamo anche $\lim_{x\to 0^\mp} f'(x) = \pm\infty$ e e $\lim_{x\to 1^\mp} f'(x) = 1$ (dunque f potrebbe essere prolungata anche come funzione $\mathcal{C}^1$ a $x = 1$ con $f(1) = 0$ e $f'(1) = 1$).[45] Anche qui non calcoliamo la derivata seconda.

(12) $[f(x) = \text{arctg}\,\frac{|x|}{x+2} + \frac{x}{2}$, vedi Figura 3.18(c)] Il dominio è $A_f = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$; la funzione non ha periodicità né simmetrie, ed è di classe $\mathcal{C}^\infty$ ovunque tranne che eventualmente nel punto $x = 0$, in cui però è perlomeno continua. I limiti notevoli sono $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \mp\infty$ e $\lim_{x\to -2^\mp} f(x) = \mp\frac{\pi}{2} - 1$. Si nota subito che $f(0) = 0$, e per lo studio generale di $f(x) \geq 0$ si potrà seguire il metodo di confronto grafico già seguito negli esempi precedenti (si ponga $t = \frac{x}{x+2}$ ovvero $x = -\frac{2t}{t-1}$: dunque se $x \geq 0$ si ha $f(x) \geq 0$ se e solo $\text{arctg}\,t \geq \frac{t}{t-1}$, mentre se $x < 0$ si ha $f(x) \leq 0$ se e solo $\text{arctg}\,t \leq -\frac{t}{t-1}$...); tuttavia, in questo caso vogliamo dedurre queste informazioni dalla derivata, tra breve. Guardiamo invece se vi sono asintoti obliqui: in effetti si ricava subito $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$ e $\lim_{x\to\mp\infty}(f(x) - \frac{1}{2}x) = \mp\frac{\pi}{4}$, e perciò $y = \frac{1}{2}x \mp \frac{\pi}{4}$ è asintoto obliquo a $\mp\infty$; cercando le intersezioni con f, da $f(x) = \frac{1}{2}x \mp \frac{\pi}{4}$ si ricava $\text{arctg}\,\frac{|x|}{x+2} = \mp\frac{\pi}{4}$, ovvero $\frac{|x|}{x+2} = \mp 1$;

---

[43] Infatti, essendo $x - 1 \sim_{\mp\infty} x$, si ha $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\log x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{1/x} = +\infty$.

[44] Infatti, essendo x all'intorno di 1, si ha $\log|x| = \log x = \log(1 + (x-1)) \sim_1 x - 1$ e pertanto $\lim_{x\to 1^\mp} f(x) = \lim_{x\to 1^\mp} \frac{(x-1)^2}{x-1} = \lim_{x\to 1^\mp}(x-1) = 0^\mp$.

[45] Iniziamo da $x \to 0^\pm$. Essendo $\frac{x-1}{2x} \sim_0^* \frac{1}{x}$ si ha $\log|x| = o_0(\frac{x-1}{2x})$ e dunque $\lim_{x\to 0^\mp} f'(x) = \lim_{x\to 0^\mp} 2\frac{x-1}{\log^2|x|}(-\frac{x-1}{2x}) = \lim_{x\to 0^\mp} \frac{(x-1)^2}{x\log^2|x|} = \pm\infty$ (perché il denominatore, come noto, tende a $0^\pm$). Se ora $x \to 1^\pm$, si ha $\frac{x-1}{\log^2|x|} \sim_1 \frac{x-1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1}$ e $\log|x| - \frac{x-1}{2x} = (x-1) - \frac{x-1}{2x} + o_1(x-1) \sim_1 (x-1)(1-\frac{1}{2x}) \sim_1 \frac{1}{2}(x-1)$, da cui $\lim_{x\to 1^\mp} f'(x) = \lim_{x\to 1^\mp} 2\frac{1}{x-1}\frac{1}{2}(x-1) = 1$.

se $\frac{|x|}{x+2} = 1$ si ottiene $|x| = x+2$, ovvero $x = -1$, mentre se $\frac{|x|}{x+2} = -1$ si ottiene $|x| = -x-2$, priva di soluzioni. Veniamo ora alla derivata, che è $f'(x) = \frac{x(x+2)}{2(x^2+2x+2)}$ (per $x < 0$, $x \neq -2$) e $f'(x) = \frac{x^2+2x+4}{2(x^2+2x+2)}$ (per $x > 0$): essa non si annulla mai nel dominio A_f, è $f'(x) > 0$ (dunque f strettamente crescente) per ogni $x > 0$ e $x < -2$, e $f'(x) < 0$ (dunque f strettamente decrescente) per ogni $-2 < x < 0$. Tornando allo studio di $f(x) \geq 0$, possiamo affermare che in $\mathbb{R}_{<-2}$ la funzione cresce strettamente da $-\infty = \lim_{x\to-\infty} f(x)$ a $-\frac{\pi}{2} - 1 = \lim_{x\to-2^-} f(x)$ e dunque vale $f(x) < 0$; in $]-2, 0[$ la funzione decresce strettamente da $\frac{\pi}{2} - 1 = \lim_{x\to-2^-} f(x) > 0$ a $0 = f(0)$, e dunque vale $f(x) > 0$; infine, in $\mathbb{R}_{>0}$ la funzione cresce strettamente da $0 = f(0)$ a $+\infty = \lim_{x\to+\infty} f(x)$, e dunque vale $f(x) > 0$. Va notato, in particolare, che 0 è un punto di minimo relativo stretto; inoltre $\lim_{x\to0^-} f'(x) = 0$ e $\lim_{x\to0^+} f'(x) = 1$. Infine, la derivata seconda vale $f''(x) = 2\frac{x+1}{(x^2+2x+2)^2}$ (per $x < 0$, $x \neq -2$) e $f''(x) = -2\frac{x+1}{(x^2+2x+2)^2}$ (per $x > 0$): si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $x = -1$, e $f''(x) > 0$ se e solo se $-1 < x < 0$: pertanto $x = -1$ è un flesso con $f(-1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \sim 0,28$ e $f'(-1) = -\frac{1}{2}$.

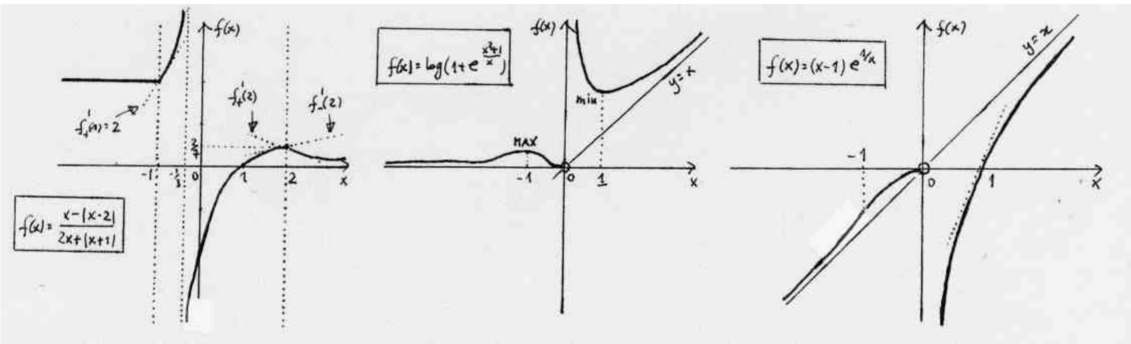

Figura 3.19: *Grafico di* **(13)** $f(x) = \frac{x-|x-2|}{2x+|x+1|}$, **(14)** $f(x) = \log\left(1+e^{\frac{x^2+1}{x}}\right)$, **(15)** $f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}$.

(13) $[f(x) = \frac{x-|x-2|}{2x+|x+1|}$, vedi Figura 3.19(a)] Il dominio di f è dato da $2x + |x+1| \neq 0$: se $x \geq -1$ ciò dà $2x + x + 1 \neq 0$, ovvero $x \neq -\frac{1}{3}$, mentre se $x < -1$ si ha $2x - (x+1) \neq 0$, sempre vero; riassumendo, il dominio di f è $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$. La funzione è continua, non ha periodicità né simmetrie, ed è di classe $\mathcal{C}^\infty$ ovunque tranne che eventualmente nei punti $x = -1$ e $x = 2$. Si tratta ora semplicemente di scrivere la funzione continua f in forma più chiara a seconda del segno delle quantità contenute nei moduli: si ha così $f(x) \equiv 2$ (per $x \leq -1$), $f(x) \equiv \frac{2(x-1)}{3x+1}$ (per $-1 < x \leq 2$, $x \neq -\frac{1}{3}$) e $f(x) = \frac{2}{3x+1}$ (per $x > 2$); nei punti "di saldatura" si ha $f(-1) = 2$ e $f(2) = \frac{2}{7}$. Il resto dello studio è allora immediato perché si tratta di studiare ciascuna delle funzioni affini sul pezzo di dominio che le compete, e lo lasciamo continuare allo studente: in particolare notiamo che vale $f(x) = 0$ se e solo se $x = 1$ (in cui $f'(1) = \frac{1}{2}$), che $f(x) \geq 0$ se e solo se $x < -\frac{1}{3}$ o $x > 1$, che la funzione ha un punto di minimo locale non stretto in $x = -1$ e un punto di massimo locale stretto in $x = 2$, punti nei quali essa non è derivabile (le derivate esistono a sinistra e a destra, ma sono diverse).

(14) $[f(x) = \log\left(1+e^{\frac{x^2+1}{x}}\right)$, vedi Figura 3.19(b)] Il dominio di f è $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R}\setminus\{0\}$; la funzione, non periodica né simmetrica, è di classe $\mathcal{C}^\infty$ ovunque; vale $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$, $\lim_{x\to0^-} f(x) = 0^+$, $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, ed è chiaro che, essendo $1+e^{\frac{x^2+1}{x}} > 1$, si ha $f(x) > 0$ per ogni x nel dominio. Come visto, $y = 0$ è asintoto a $-\infty$ e $x = 0$ è asintoto verticale a destra; si ha poi $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ e $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = 0$, e dunque $y = x$ è asintoto a $+\infty$, privo di intersezioni con f.[46] La derivata

[46] Infatti, essendo $e^{\frac{x^2+1}{x}}$ infinito a $+\infty$ si ha $1+e^{\frac{x^2+1}{x}} \sim_{+\infty} e^{\frac{x^2+1}{x}}$, e grazie alla Proposizione 3.2.11(iii-c) abbiamo allora $\log\left(1+e^{\frac{x^2+1}{x}}\right) \sim_{+\infty} \log e^{\frac{x^2+1}{x}} = \frac{x^2+1}{x}$, e pertanto $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x}}{x} = 1$.

è $f'(x) = \frac{e^{\frac{x^2+1}{x}}}{1+e^{\frac{x^2+1}{x}}}\,\frac{x^2-1}{x^2}$, dunque $f'(x) = 0$ per $x = \pm 1$ e $f'(x) > 0$ per $x < -1$ o $x > 1$: si ricava che $x = -1$ (risp. $x = 1$) è un punto di massimo (risp. minimo) locale stretto, con $f(-1) = \log(1+e^{-2}) \sim 0,13$ e $f(1) = \log(1+e^2) \sim 2,12$. Vale inoltre $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0^-$.[47] Tralasciamo lo studio della derivata seconda; tuttavia, certamente vi saranno almeno due flessi a, b per $x < 0$, con $a < -1$ e $-1 < b < 0$.

(15) [$f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}$, vedi Figura 3.19(c)] Il dominio di f è $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; la funzione non è periodica né simmetrica, ed è di classe $\mathcal{C}^\infty$; vale $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0^-$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. Si ha $f(x) = 0$ se e solo se $x = 1$ e $f(x) > 0$ se e solo se $x > 1$; si ha $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ e $\lim_{x\to\mp\infty}(f(x) - x) = 0$, e perciò $y = x$ è asintoto a $\mp\infty$, senza intersezioni con f.[48] La derivata è $f'(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$, strettamente positiva (e dunque, f strettamente crescente) in tutto il dominio. Si noti che $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{t\to +\infty} \frac{t^2}{e^t} = 0^+$ e (ovvio, visto che $y = x$ è asintoto) $\lim_{x\to\mp\infty} f'(x) = 1$. Infine, la derivata seconda è $f''(x) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^4}(x+1)$, dunque $f''(x) = 0$ per $x = -1$ e $f''(x) > 0$ (dunque, f strettamente convessa) per $x < -1$: pertanto $x = -1$ è un flesso, con $f(-1) = -\frac{2}{e} \sim -0,73$ e $f'(-1) = \frac{3}{e} \sim 1,1$.

Poi $\log\big(1+e^{\frac{x^2+1}{x}}\big) - x = \log\big(1+e^{\frac{x^2+1}{x}}\big) - \log e^x = \log(e^{-x} + e^{\frac{1}{x}})$; ma essendo $\lim_{x\to+\infty}(e^{-x} + e^{\frac{1}{x}}) = 1$, pur avendosi $e^{-x} + e^{\frac{1}{x}} \sim e^{\frac{1}{x}}$ stavolta non possiamo applicare la Proposizione 3.2.11(iii-c) (per concludere che $\log(e^{-x} + e^{\frac{1}{x}}) \sim_{+\infty} \log(e^{\frac{1}{x}}) = \frac{1}{x}$): dobbiamo essere più prudenti. Tuttavia basta applicare la continuità del logaritmo: infatti $\lim_{x\to+\infty} \log(e^{-x} + e^{\frac{1}{x}}) = \log(\lim_{x\to+\infty}(e^{-x} + e^{\frac{1}{x}})) = \log 1 = 0$. Per l'assenza di intersezioni, imponendo $f(x) = x$ e procedendo come appena fatto si trova $e^{-x} + e^{\frac{1}{x}} = 1$, impossibile perché se $x < 0$ si ha $e^{-x} > 1$ e $e^{\frac{1}{x}} > 0$, mentre se $x > 0$ si ha $e^{-x} > 0$ e $e^{\frac{1}{x}} > 1$, così che in ogni caso il primo membro è > 1.

[47] Infatti vale $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{x^2+1}{x}}\frac{1}{x^2} = -\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = -\lim_{t\to+\infty}\frac{t^2}{e^t} = 0^-$.

[48] Infatti, essendo $\frac{1}{x}$ infinitesimo e ricordando che $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o_0(t^2)$ si ha $(x-1)e^{\frac{1}{x}} - x = (x-1)(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o_{\mp\infty}(\frac{1}{x^2})) - x = x+1+\frac{1}{2x}+o_{\mp\infty}(\frac{1}{x})-1-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o_{\mp\infty}(\frac{1}{x^2})-x = -\frac{1}{2x}+o_{\mp\infty}(\frac{1}{x}) \sim -\frac{1}{2x}$, da cui $\lim_{x\to\mp\infty}(f(x)-x) = 0$. Per le intersezioni, si noti che $(x-1)e^{\frac{1}{x}} = x$ significa (ponendo $t = \frac{1}{x}$) $e^t = \frac{1}{1-t}$, il che sarebbe vero solo per $t = 0$, impossibile.