

# Statistica Descrittiva III

## Serie statistiche bi-variate

- Definizioni
- Rappresentazioni tabellari e grafiche
- Indici di posizione e di variabilità
- Dipendenza lineare: retta di regressione ed indice R.

1

## Serie Bi-variate

- **Serie bi-variate**: serie statistica in cui da ogni unità statistica si rilevano due caratteri.

$$o_i = (x_i ; y_i) \quad O = \{o_i\}$$

- Esempio 1:
  - Popolazione: 15 studenti di matematica.
  - Caratteri:  
X: genere                      Y: altezza
  - Osservazioni:

(F; 155) (M; 173) (M; 191) (F; 163) (F; 159) (M; 178)  
(M; 183) (M; 169) (F; 169) (M; 170) (M; 183) (M; 177)  
(M; 175) (M; 176) (F; 170) 2

## Serie Bi-variate: esempi - I

- Esempio 2:
  - Popolazione: 16 cavie di laboratorio.
  - Caratteri:  
X: trattamento antibiotico      Y: stato dell'infezione  
{Si ; No}                              {Espansa, Stabile, Ridotta}
  - Osservazioni:  
(S ; E) (S ; R) (S ; R) (S ; R) (S ; R) (S ; S) (S ; R) (S ; S)  
(S ; R) (N ; S) (N ; S) (N ; E) (N ; E) (N ; S) (N ; R) (S ; E)
- **Osservazione**: i caratteri della serie possono essere non omogenei.

3

## Serie Bi-variate: esempi - II

- Esempio 3:
  - Popolazione: 15 studenti di matematica.
  - Caratteri:  
X: peso                              Y: altezza
  - Osservazioni:  
(55; 155) (78; 173) (100; 191) (60; 163) (50; 159) (78; 178)  
(101; 183) (68; 169) (60; 169) (72; 170) (82; 183)  
(82; 177) (75; 175) (72; 176) (65; 170)
- **Osservazione**: se i caratteri sono omogenei (es. quantitativi continui) possiamo estendere il concetto alla serie bivariata (serie quantitativa continua).

4

## Scatter plot (diagrammi a dispersione)

- Rappresentazione grafica usata per serie quantitative, in cui ogni osservazione viene riportata in un piano cartesiano come fosse un punto.

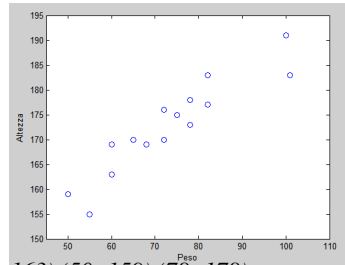
- Esempio 3:

- Caratteri:

- X: peso
- Y: altezza

- Osservazioni:

(55; 155) (78; 173) (100; 191) (60; 163) (50; 159) (78; 178)  
 (101; 183) (68; 169) (60; 169) (72; 170) (82; 183) (82; 177)  
 (75; 175) (72; 176) (65; 170)



5

## Modalità: definizione

- Osservazione** il concetto di modalità è legato al carattere.
  - in una monovariata serie e carattere coincidono.
  - una serie bi-variata è formata da due caratteri.
- Problema:** è possibile estenderlo alla Serie?
  - $M_x$ : modalità carattere X.
  - $M_y$ : modalità carattere Y.
  - $M = M_x M_y$ : modalità serie (# possibili coppie).

6

## Modalità serie: esempio

- Esempio 2:

- Popolazione: 16 cavie di laboratorio.
- Modalità caratteri:

X: trattamento antibiotico

Y: stato dell'infezione

{Si; No}

{Espansa, Stabile, Ridotta}

$M_x = 2$

$M_y = 3$

- **Modalità serie:**

$M = M_x M_y = 6$

		Infezione		
		Espansa	Stabile	Ridotta
Trattamento	Si	(S; E)	(S; S)	(S; R)
	No	(N; E)	(N; S)	(N; R)

7

## Modalità serie: classi

- Esempio 1:

- Popolazione: 15 studenti di matematica.
- Modalità caratteri:

X: Genere

Y: altezza

{M; F}

{155;159;163;169;170;173;  
175;176;177; 178;183;191}

$M_x = 2$

$M_y = 12$

- **Modalità serie:**

$M = M_x M_y = 24$

- Osservazione:** nel caso continuo spesso si introducono classi di modalità.

8

## Modalità serie: classi

### Esempio 1:

- Popolazione: 15 studenti di matematica.
- Modalità caratteri:

X: Genere

Y: altezza

{M; F}

{155-165; 165-175; 175-185; 185-195}

$$M_x = 2$$

$$C_y = 4$$

- Modalità serie:  $M = M_x C_y = 8$

		Altezza			
		155 - 165	165 - 175	175 - 185	185-195
Genere	M	$m_{1,1}$	$m_{1,2}$	$m_{1,3}$	$m_{1,4}$
	F	$m_{2,1}$	$m_{2,2}$	$m_{2,3}$	$m_{2,4}$

- Le diverse modalità si indicano con  $m_{i,j}$ .

9

## Serie mono-variate: frequenza.

### Frequenza: un valore associato ad ogni modalità

- assoluta ( $n_i$ ): # osservazioni della modalità  $i$ .
- relativa ( $f_i$ ): frazione delle osservazioni della modalità  $i$ .  
 $f_i = n_i / N$
- cumulata ( $F_i$ ): frazione delle osservazioni delle modalità non più grandi di  $i$ . ( $F_i = (n_1 + n_2 + \dots + n_i) / N$ )

### Come estendere il concetto alle serie bi-variate?

- Osservazione: nelle bi-variate la singola modalità viene definita da due indici ( $i, j$ ).

10

## Serie bi-variate: frequenza assoluta.

### Frequenza: un valore associato ad ogni modalità $i, j$

- assoluta ( $n_{i,j}$ ): # osservazioni della modalità  $i, j$ .

### Esempio 2

- Osservazioni: (S;E) (S;R) (S;R) (S;R) (S;R) (S;S) (S;R) (S;S) (S;R) (N;S) (N;S) (N;E) (N;E) (N;S) (N;R) (S;E)

		Infezione		
		Espansa	Stabile	Ridotta
Trattamento	Si	$n_{1,1}$	$n_{1,2}$	$n_{1,3}$
	No	$n_{2,1}$	$n_{2,2}$	$n_{2,3}$

		Infezione		
		Espansa	Stabile	Ridotta
Trattamento	Si	2	2	6
	No	2	3	1

11

## Tabella a doppia entrata.

### Tabella a doppia entrata: tabella delle frequenze assolute completata con i totali di riga e colonna.

- Osservazione: alcuni autori usano il termine tabella di contingenza.

### Esempio 2

- Osservazioni: (S;E) (S;R) (S;R) (S;R) (S;R) (S;S) (S;R) (S;S) (S;R) (N;S) (N;S) (N;E) (N;E) (N;S) (N;R) (S;E)

		Infezione			Totali
		Espansa	Stabile	Ridotta	
Trattamento	Si	2	2	6	10
	No	2	3	1	6
Tot		4	5	7	16

$n_{i,j}$ : Frequenze assolute carattere trattamento

$n_{+,j}$ : Frequenze assolute carattere infezione

N: Totale osservazioni

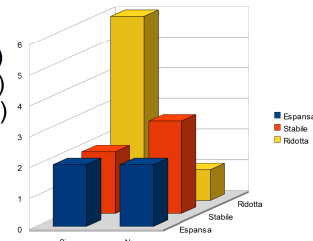
12

## Serie bi-variate: diagramma a barre

- **Diagramma a barre:** rappresentazione 3 D di frequenze assolute per serie bi-variate.
- **Osservazione:** usato serie a caratteri qualitativi e/o discreti.
- **Esempio 2**

– Osservazioni: (S;E) (S;R) (S;R) (S;R) (S;R) (S;R) (S;S) (S;R) (S;S) (S;R) (N;S) (N;S) (N;E) (N;E) (N;S) (N;R) (S;E)

		Infezione		
		Espansa	Stabile	Ridotta
Trattamento	Si	2	2	6
	No	2	3	1



13

## Serie bi-variate: frequenza relativa.

- **Frequenza:** un valore associato ad ogni modalità  $i, j$ 
  - assoluta ( $n_{i,j}$ ): # osservazioni della modalità  $i, j$ .
  - relativa ( $f_{i,j} = n_{i,j} / N$ ): frazione osservazioni modalità  $i, j$ .
- **Esempio 2**
  - Osservazioni: (S;E) (S;R) (S;R) (S;R) (S;R) (S;R) (S;S) (S;R) (S;S) (S;R) (N;S) (N;S) (N;E) (N;E) (N;S) (N;R) (S;E)

		Infezione			
		Espansa	Stabile	Ridotta	
Trattamento	Si	$f_{1,1}$	$f_{1,2}$	$f_{1,3}$	$f_{1,+}$
	No	$f_{2,1}$	$f_{2,2}$	$f_{2,3}$	$f_{2,+}$
		$f_{+,1}$	$f_{+,2}$	$f_{+,3}$	1

		Infezione			
		Espansa	Stabile	Ridotta	
Trattamento	Si	2/16	2/16	6/16	5/8
	No	2/16	3/16	1/16	3/8
		1/4	5/16	7/16	1

## Serie mono-variate: indici di posizione.

- **Indici di posizione:** il valore “centrale” della serie  $S$ .
  - **moda ( $mo$ ):** modalità con frequenza maggiore. (tutti i dati – per dati continui si parla di classe/i modale)
  - **mediana ( $me$ ):** osservazione che bipartisce la popolazione (solo dati ordinabili)
  - **media ( $\bar{S}$ ):** media delle osservazioni. (solo dati quantitativi)

Come estendere il concetto alle serie bi-variate?

- **Osservazione:** in una bi-variate le osservazioni sono vettori.
- **Proposta:** cerco di estendere al caso multidimensionale il criterio di calcolo.
- **Osservazione:** debbo scegliere un indice che sia calcolabile per ambo i caratteri.

## Serie bi-variate: moda.

- **Indici di posizione:** il valore “centrale” della serie  $S$ .
  - **moda ( $mo$ ):** modalità con frequenza maggiore. (tutti i dati – per dati continui si parla di classe/i modale)
- In una serie bi-variate ho definito sia modalità che frequenza
- Posso applicare direttamente la definizione

- **Esempio 1**

$mo = (Si ; Ridotta)$

		Infezione		
		Espansa	Stabile	Ridotta
Trattamento	Si	2	2	6
	No	2	3	1

- **Esempio 2**

$mo = (M ; 175-185)$

		Altezza			
		155 - 165	165 - 175	175 - 185	185-195
Genere	F	3	2	0	0
	M	0	3	6	1

## Serie bi-variate: moda - osservazioni.

- Un una serie bivariata vi sono tre diverse mode.
- Esempio: data la serie a lato si hanno le seguenti

- Moda della Serie  
 $mo = (C; 10)$
- Moda caratteri

- $mo_x = A$
- $mo_y = 30$

		X			Totali
		A	B	C	
Y	10	1	2	6	9
	20	4	3	1	8
	30	5	3	2	10
Totali		10	8	9	27

- **Osservazione:** la moda di una serie bi-variate può non coincidere con la moda dei singoli caratteri.

17

## Serie bi-variate: mediana.

- **Indici di posizione:** il valore "centrale" della serie  $S$ .
  - **moda** ( $mo$ ): modalità con frequenza maggiore. (tutti i dati – per dati continui si parla di classe/i modale)
  - **mediana** ( $me$ ): osservazione che bipartisce la popolazione (solo dati ordinabili)
- **Osservazione:** le osservazioni sono vettori a 2 dimensioni.
- **Osservazione:** non è possibile ordinare in modo univoco vettori a due dimensioni.
- **Osservazione:** la mediana richiede l'ordinamento delle osservazioni.
- **Conseguenza:** la mediana non si applica a serie bi-variate.

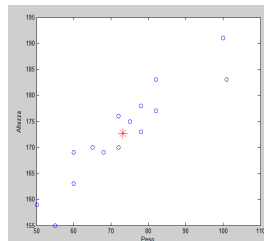
18

## Serie bi-variate: media.

- **Indici di posizione:** il valore "centrale" della serie  $S$ .
  - **media** ( $\bar{S}$ ): media delle osservazioni. (solo dati quantitativi)
- Per applicare la definizione debbo
  - sommare più vettori
  - dividere un vettore per un numero.

- Esempio 3

$$\begin{aligned} & ((55; 155) + (78; 173) + \dots + (65; 170))/15 = \\ & = (55 + 78 + \dots + 65; 155 + 173 + \dots + 170)/15 = \\ & = ((55 + 78 + \dots + 65)/15; (155 + \dots + 170)/15) = \\ & = (73.20; 172.73) \end{aligned}$$



- **Osservazione:** la media della serie è data dalle medie dei caratteri

$$\bar{S} = (\bar{X}; \bar{Y})$$

19

## Serie mono-variate: indici di variabilità.

- **Indici di variabilità:** quanto le osservazioni si discostano dal "centrale" della serie  $S$ .
  - **range**: osservazione maggiore meno osservazione minore
  - **distanza interquartile** ( $D$ ): differenza terzo, primo quartile
  - **varianza** ( $\sigma^2$ ): media degli scarti dalla media
- **Osservazione:** calcolabili solo per dati quantitativi.

Come estendere il concetto alle serie bi-variate?

- **Osservazione:** non è possibile ordinare un gruppo di vettori a due dimensioni.
- **Proposta:** estendo solo la varianza.

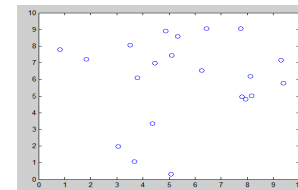
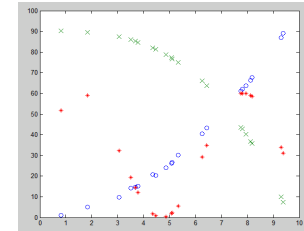
20

## Serie bi-variate: indice di variabilità-I.

- **Osservazione:** la variabilità in una serie bivariata può essere dovuta a tre fattori
  - Variabilità carattere  $X$ .
  - Variabilità carattere  $Y$ .
  - Mutua influenza dei due valori.
- Esempio:
  - Popolazione 4 persone
  - Caratteri
    - $X$  = Altezza della persona in cm
    - $Y$  = Altezza della persona in m
  - Osservazioni (150; 1.5) (170;1.7) (180;1.8) (160;1.6)
- Nota l'osservazione di  $X$  "ho" quella di  $Y$ , pertanto la variabilità di  $Y$  è legata a quella di  $X$ .

## Mutua influenza: classificazione

- Due caratteri possono essere legati in diversi modi
  - Proporzionalità diretta: al crescere di  $x$  cresce  $y$ . (o)
  - Proporzionalità inversa: al crescere di  $x$  decresce  $y$ . (x)
  - Legame misto. (\*)



- Due caratteri possono essere indipendenti

22

## Covarianza: idea base.

- Come misuro il "grado di legame" fra i due caratteri ?
- **Proposta:** data un'osservazione  $(x_i; y_i)$  valuto il prodotto dei due scarti (distanza dai rispettivi valori medi  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ ).

$$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

- **Osservazione:** il singolo prodotto è:
  - positivo: gli scarti sono concordi (hanno lo stesso segno)
    - proporzionalità diretta: ad una osservazione di  $x$  sopra media corrisponde una  $y$  sopra media e viceversa
  - negativo in caso contrario (proporzionalità inversa).
- Se i due caratteri sono legati, tutti i contributi sono concordi.
- Sperabilmente, se i caratteri sono indipendenti, si avranno sia contributi negativi che positivi.

23

## Covarianza: definizione I.

- **Definizione:** data una serie bi-variate avente  $N$  osservazioni  $(x_i; y_i)$  definisco covarianza

$$\sigma_{XY} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

- Esempio
  - Osservazioni (150; 1.5) (170;1.7) (180;1.8) (160;1.6)
  - Media = (165,1.65)
  - Varianza  $X = (150^2 + 170^2 + 180^2 + 160^2)/4 - 165^2 = 125$
  - Varianza  $Y = (1.5^2 + 1.7^2 + 1.8^2 + 1.6^2)/4 - 1.65^2 = 0.0125$
  - Contributi = (-15\*-0.15) (5\*0.05) (15\*0.15) (-5\*-0.05)
  - Covarianza = (2.25 + 0.25 + 2.25 + 0.25)/4 = 1.25
- **Osservazione:** la definizione non usa le frequenze relative

24

## Covarianza: definizione II.

- **Definizione:** data un serie bi-variata  $(x_i; y_i)$  avente  $M = M_x M_y$  modalità, con frequenza relativa  $f_{i,j}$  definisco covarianza

$$\sigma_{XY} = \sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=1}^{M_y} (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) f_{i,j}$$

- Esempio 4

- S: numero di teste lanciando due monete

- N = 80

		Lancio 1 (X)		
		0	1	
Lancio 2 (Y)	0	22/80	20/80	42/80
	1	18/80	20/80	38/80
		40/80	40/80	1

$$\bar{x} = 0 \frac{40}{80} + 1 \frac{40}{80} = \frac{1}{2} \quad \bar{y} = 0 \frac{42}{80} + 1 \frac{38}{80} = \frac{19}{40} \quad \sigma_{XY} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (x_i - \frac{1}{2})(y_j - \frac{19}{40}) f_{i,j}$$

$$\sigma_{XY} = (0 - \frac{1}{2})(0 - \frac{19}{40}) \frac{22}{80} + (0 - \frac{1}{2})(1 - \frac{19}{40}) \frac{18}{80} + (1 - \frac{1}{2})(0 - \frac{19}{40}) \frac{20}{80} + (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{19}{40}) \frac{20}{80}$$

$$\sigma_{XY} = \frac{19}{80} \frac{22}{80} - \frac{21}{80} \frac{18}{80} - \frac{19}{80} \frac{20}{80} + \frac{21}{80} \frac{20}{80} = 0.0125 \quad 25$$

## Serie bi-variate: indice di variabilità-II.

- **Osservazione:** la variabilità in una serie bivariata può essere dovuta a tre fattori
  - Variabilità carattere X.
  - Variabilità carattere Y.
  - Mutua influenza dei due valori.
- la variabilità viene definita mediante la seguente matrice detta matrice varianze/covarianza:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix}$$

- **Osservazione:**  $\Sigma$  è sempre simmetrica.
- **Osservazione:** si dimostra che  $\Sigma$  è sempre definita positiva<sup>26</sup>

## Covarianza: osservazione.

Cosa succede se aumento la variabilità dei caratteri?

- **Desiderio:**  $\sigma_{XY}$  dovrebbe descrivere solo la mutua variabilità fra i caratteri quindi vorrei non variasse.
- **Verifica:** modifico la variabilità delle precedenti osservazioni.
  - Precedenti [150; 1.5] [170; 1.7] [180; 1.8] [160; 1.6]
  - Osservazioni (140; 1.4) (170; 1.7) (190; 1.9) (160; 1.6)
  - Media = (165, 1.65) [(165, 1.65)]
  - Varianza X = 325 [125]
  - Varianza Y = 0.0325 [0.0125]
  - Contributi = (-25\*-0.25) (5\*0.05) (25\*0.25) (-5\*-0.05)
  - Covarianza = (6.25 + 0.25 + 6.56 + 0.25)/4 = 3.25 [1.25]
- **Osservazione:** il valore della covarianza è legato alla variabilità.<sup>27</sup>

## Correlazione (di Pearson): definizione.

- **Definizione:** data un serie bi-variata  $(x_i; y_i)$  definisco correlazione (di Pearson) il valore

$$R = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_x \sigma_y}$$

- **Osservazione:** spesso di una serie dispongo della varianza invece che della deviazione standard.
- Alcuni autori preferiscono utilizzare la versione “quadrata” del coefficiente di correlazione per motivi pratici.

$$R^2 = \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2}$$

## Correlazione (di Pearson): esempi - I.

- Esempio:

- Osservazioni (150; 1.5) (170;1.7) (180;1.8) (160;1.6)
  - Varianza  $X = 125$
  - Varianza  $Y = 0.0125$
  - Covarianza = 1.25
- $$R^2 = \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} = \frac{1.25^2}{125 \cdot 0.0125} = 1$$

- Esempio modificato

- Osservazioni (140; 1.4) (170;1.7) (190;1.9) (160;1.6)
  - Varianza  $X = 325$
  - Varianza  $Y = 0.0325$
  - Covarianza = 3.25
- $$R^2 = \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} = \frac{3.25^2}{325 \cdot 0.0325} = 1$$

- Osservazione:**  $R$  sembra meno influenzato dalla variabilità

29

## Correlazione (di Pearson): esempi - II.

- Osservazione:** la definizione di  $R$  si applica direttamente anche al caso avessi frequenze relative.

- Esempio 4

- $S$ : numero di teste lanciando due monete

$$\bar{x} = \frac{1}{2} \quad \bar{y} = \frac{19}{20} \quad \sigma_{XY} = 0.0125$$

		Lancio 1 (X)		
		0	1	
Lancio 2 (Y)	0	22/80	20/80	42/80
	1	18/80	20/80	38/80
		40/80	40/80	1

$$\sigma_x^2 = 0^2 \frac{1}{2} + 1^2 \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \sigma_y^2 = 0^2 \frac{21}{40} + 1^2 \frac{19}{40} - \left(\frac{19}{40}\right)^2 = \frac{399}{1600} \approx \frac{1}{4}$$

$$R = \frac{\sigma_{XY}}{\sqrt{\sigma_x^2 \sigma_y^2}} = 0.05$$

- Osservazione:** a bassi valori di  $R$  (o  $R^2$ ) sembrano corrispondere legami deboli fra i caratteri.

30

## Correlazione (di Pearson): proprietà.

- Si dimostrano le seguenti proprietà:

a)  $-1 \leq R \leq 1$

b) Se per ogni osservazione  $y_i = a x_i + b$  allora  $|R| = 1$ .

c) Se  $(x; y)$  sono ottenute da realizzazioni di vv. cc.  $X$  ed  $Y$  indipendenti allora

- $R$  è una v.c.

- $E[R] = 0$ .

- Osservazione:** la proprietà b) non implica che se  $R = \pm 1$  i caratteri della serie sono affini (o in ogni caso legati).

- Osservazione:** la proprietà c) non implica che se  $R = 0$  i caratteri della serie sono indipendenti.

- Deduzione:**  $R$  è un indicatore, non fornisce alcuna certezza.

31

## Variabili dipendenti: esempio I - I.

- Esempio:

- Siano  $X$  ed  $Y$  due vv. cc. tali che  $Y = 2X^2$

- Supponiamo che

- si abbiano 4 estrazioni di

$$x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = -2; x_4 = -1$$

- cui corrispondono 4 osservazioni della bivariata  $(x_i, y_i)$

$$(1;2) (2;4) (-2;4) (-1;2)$$

- Come sarà il coefficiente  $R^2$ ?

- Osservazione:** Le osservazioni sono dipendenti.

- Osservazione:** Il legame fra le osservazioni è di tipo misto.

- Deduzione:** ?

32



## Variabili dipendenti: esempio I - II

- Osservazioni:  $(1;2) (2;4) (-2;4) (-1;2)$
- Calcolo momenti dei singoli caratteri

$$\bar{x} = \frac{1+2-2-1}{4} = 0 \quad \sigma_x^2 = \frac{1+4+4+1}{4} - 0^2 = \frac{5}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{2+4+4+2}{4} = 3 \quad \sigma_y^2 = \frac{4+16+16+4}{4} - 3^2 = 1$$

- Calcolo covarianza

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{4}[(1-0)(2-3) + (2-0)(4-3) + (-2-0)(4-3) + (-1-0)(2-3)]$$

$$\sigma_{xy} = \frac{-1+2-2+1}{4} = 0 \quad R^2 = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} = \frac{0^2}{\frac{5}{2} \cdot 1} = 0$$

- **Osservazione:** nel caso di variabili con legame non lineare  $R$  può dare delle false certezze.

33

## Variabili dipendenti: esempio II - I.

- Esempio 5:

- Siano  $X$  ed  $Y$  due vv. cc. tali che  $Y = 2X + 0.5Z$
- Dove  $Z$  è la v.c. Normale standard
- Supponiamo che

- si abbiano 4 estrazioni di  $X$  e  $Z$

$$(x_1=1; z_1=0.1) ; (x_2=2; z_2=-0.1) (x_3=-2; z_3=-0.2) (x_4=-1; z_4=0.2)$$

- cui corrispondono 4 osservazioni della bivariata  $(x_i, y_i)$   
 $(1;2.05) (2;3.95) (-2;-4.1) (-1;-1.9)$

- Come sarà il coefficiente  $R^2$  ?
- **Osservazione:** Le osservazioni sono dipendenti.
- **Osservazione:** L'influenza di  $X$  su  $Y$  è prevalente rispetto a quella di  $Z$  su  $Y$ . ( $Z$  può considerarsi un rumore o disturbo).

34

## Variabili dipendenti: esempio II - II

- Osservazioni:  $(1;2.05) (2;3.95) (-2;-4.1) (-1;-1.9)$
- Calcolo momenti dei singoli caratteri

$$\bar{x} = \frac{1+2-2-1}{4} = 0 \quad \bar{y} = \frac{2.05+3.95-4.1-1.9}{4} = 0$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1+4+4+1}{4} - 0^2 = \frac{5}{2} \quad \sigma_y^2 = \frac{4.2025+15.6025+16.81+4.41}{4} - 0^2 = 10.05625$$

- Calcolo covarianza

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{4}[(1-0)(2.05-0) + (2-0)(3.95+0) + (-2-0)(-4.1-0) + (-1-0)(-1.9-0)]$$

$$\sigma_{xy} = \frac{2.05+7.9+8.2+1.9}{4} = \frac{20.05}{4} = 5.0125$$

- Calcolo correlazione  $R^2 = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} = \frac{5.0125^2}{\frac{5}{2} \cdot 10.05625} = 1$

35

## Legami fra caratteri.

Come riconoscere in maniera quantitativa il legame fra i due caratteri di una bivariata?

- **Idea:** scelgo un tipo di legame utile e cerco quello che meglio approssima i dati.
- Per poter concretizzare l'idea debbo definire
  - Che cosa sia un legame
  - Che cosa voglia dire un legame utile
  - Come misuro la bontà dell'approssimazione.

36

## Legami fra caratteri: modelli.

Come descrivere in maniera quantitativa un legame fra i due caratteri?

- **Osservazione:** ogni dato è una coppia di misure ( $x$  ed  $y$ ).
- In “matematica” un legame fra due elementi di un insieme è definito funzione.
- **Soluzione:** considero legame una funzione  $m: X \rightarrow Y$ .
- Ad ogni misura  $x_i$  di  $X$  il legame “predice” una possibile misura  $\hat{y}_i = m(x_i)$  chiamata **predizione**.
- Poiché  $m(\cdot)$  “descrive” il legame viene chiamato **modello**.

37

## Modelli: tassonomia.

Quanti modelli esistono?

- **Osservazione:** il numero di funzioni possibili è enorme
- Il problema di identificazione è troppo complesso!
- **Osservazione:** esistono diversi tipi di funzioni
  - Polinomiali
  - Trigonometriche
  - Esponenziali
  - ...
- Spezzo il problema in due:
  - Trovo il tipo di funzione (scelta umana)
    - es. polinomi di secondo grado
  - Trovo la funzione “migliore” fra le scelte. (data driven)
    - es.  $\hat{y}_i = 14x_i^2 + 12x_i + 5$

38

## Modelli: cosa vuol dire migliore? .

- In generale si predilige la semplicità.
- Modelli “semplici”
  - Affine  $\hat{y}_i = a x_i + b$
  - Parabolico  $\hat{y}_i = a x_i^2 + b x_i + c$
- **Osservazione:** ogni famiglia di modelli possiede un insieme di parametri
  - affine:  $\{a, b\}$
  - parabolico:  $\{a, b, c\}$ .
- Osservazione: scelto il tipo di modello, la relazione viene definita una volta **identificati i parametri**.
- I parametri si identificano con un criterio di “bontà”.

39

## Criterio di bontà di un modello - I.

Come si quantifica la bontà di un modello?

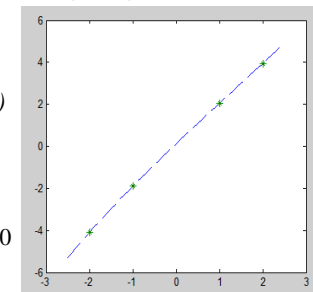
- **Osservazione:** poiché un modello realizza predizioni un criterio ragionevole è che le predizioni siano accurate.

$$\hat{y}_i = y_i \quad \Rightarrow \quad m(x_i) = y_i$$

- **Esempio 5: (errori di misura)**  
 $(x_1 = 1; y_1 = 2.05); (x_2 = 2; y_2 = 3.95)$   
 $(x_3 = -2; y_3 = -4.1); (x_4 = -1; y_4 = -1.9)$

- Famiglia: polinomi
  - Polinomio interpolante

$$\hat{y}_i = 0.0125x_i^3 - 0.05x_i^2 + 1.9625x_i + 0.1250$$



## Funzione interpolante: osservazioni

- Si dimostra che dati  $N$  punti la funzione interpolante ha (nel caso generale) grado  $N-1$ .
- **Osservazione:** per avere risultati attendibili si usano tanti dati
- **Conseguenza:** modello interpolante complesso.
- **Osservazione:** nel caso di errori di misura la funzione interpolante descrive anche il rumore (cosa che non vorrei)
- **Conseguenza:** si preferiscono modelli di grado basso
- Si dice che le variabili “regrediscono” a
  - Rette (retta di regressione)
  - Parabole (parabola di regressione)
- **Considerazione:** serve un nuovo criterio per individuare il modello migliore nella famiglia di modelli.

## Criterio di bontà di un modello - II.

- Dato un modello  $m(x_i)$ , definisco residuo
 
$$r_i = \hat{y}_i - y_i$$
- **Osservazione:** Un buon modello avrà dei residui non nulli (mi rappresentano l'errore di misura).
- **Osservazione:** Un buon modello avrà residui piccoli. (deve descrivere i dati)
- Proposta: i due risultati potrebbero essere ottenuti minimizzando la somma dei quadrati dei residui.

$$SSR = \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - y_i)^2$$

- SSR: sum squared residual

42

## SSR: esempio

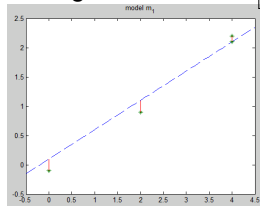
- Esempio: Data la bi-variata in tabella

- Considerare i modelli

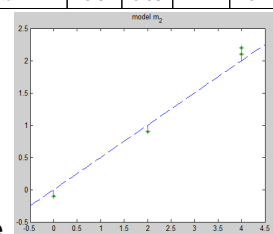
- $m_1: \hat{y}_i = 0.5 x_i + 0.1$

- $m_2: \hat{y}_i = 0.5 x_i$

- graficamente è  $r_i$  è il segmento rosso



$x_i$	$y_i$	$m_1$			$m_2$		
		$m_1(x_i)$	$r_i$	$r_i^2$	$m_2(x_i)$	$r_i$	$r_i^2$
0	-0.1	0.1	0.2	0.04	0	0.1	0.01
4	2.1	2.1	0	0	2	-0.1	0.01
4	2.2	2.1	-0.1	0.01	2	-0.2	0.04
2	0.9	1.1	0.2	0.04	1	0.1	0.01
Totali			0.3	0.09		-0.1	0.07



- Il modello  $m_2$  risulta migliore

43

## Retta di regressione.

- Tecnica che prevede
  - Modello di tipo affine  $m_1: \hat{y}_i = a x_i + b$
  - Parametri identificati rendendo minimo

$$SSR = \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^N (a x_i + b - y_i)^2$$

- In simboli  $\arg \min_{a,b} \sum_{i=1}^N (a x_i + b - y_i)^2$

- Si dimostra che  $a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$        $b = \bar{y} - a \bar{x}$

- La minimizzazione della  $SSR$  fu proposta da Gauss con il nome di **metodo dei minimi quadrati**.

44

## Retta di regressione: esempio

- Esempio 5: (errori di misura)  
 $(x_1=1; y_1=2.05); (x_2=2; y_2=3.95)$   
 $(x_3=-2; y_3=-4.1); (x_4=-1; y_4=-1.9)$

- Da esercizio precedente

$$\bar{x}=0 \quad \bar{y}=0 \quad \sigma_{xy}=5.0125$$

$$\sigma_x^2=2.5 \quad \sigma_y^2=10.05625$$

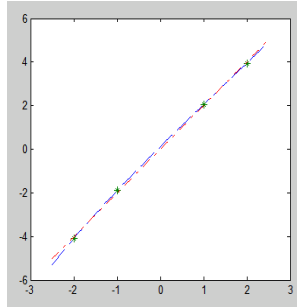
$$a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{5.0125}{2.5} = 2.005$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 0$$

- retta di regressione  $\hat{y}_i = 2.005 x_i$

- funzione interpolante  $\hat{y}_i = 0.0125x_i^3 - 0.05x_i^2 + 1.9625x_i + 0.1250$

- legame vero  $y_i = 2x_i + 0.5z_i$



45

## Retta di regressione: proprietà

- Sia  $m(x)$  una retta di regressione, si dimostra che

-  $m$  passa sempre per la media della serie

$$\bar{y} = m(\bar{x})$$

- La somma degli scarti è nulla

$$\sum_{i=1}^N \hat{y}_i - y_i = \sum_{i=1}^N (a x_i + b - y_i) = 0$$

- Se  $y_i = a x_i + b$  (osservazioni disposte su una retta) allora

- $m(x)$  è la retta interpolante
- $SSR = 0$ .

46

## Retta di regressione: validità

- **Osservazione:** date le osservazioni di una bivariata si può sempre calcolare la retta di regressione.

Come verificare la bontà del modello ?

- **Criterio grafico:** disegnare la retta insieme al diagramma a dispersione

- **Criterio numerico:** calcolare il coefficiente di Pearson

-  $|R| < 0.3$  scarsa probabilità di legame

-  $0.3 < |R| < 0.7$  moderata probabilità di legame lineare

-  $0.7 < |R|$  ottima probabilità di legame lineare

47

## Ricapitolando - I

- Indici di posizione

- Moda: modalità frequenza della serie maggiore

- Media: unione delle medie delle modalità  $\bar{S} = (\bar{X}; \bar{Y})$

- Indici di variabilità

- Covarianza (varianza congiunta)

$$\sigma_{XY} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$\sigma_{XY} = \sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=1}^{M_y} (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) f_{i,j}$$

- Matrice varianza/covarianza

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$$

48

## Ricapitolando - II

- Retta di regressione

- Modello di tipo affine  $m: \hat{y}_i = a x_i + b$

- Parametri identificati rendendo minimo

$$SSR = \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^N (a x_i + b - y_i)^2$$

- Parametri  $a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$   $b = \bar{y} - a \bar{x}$

- Indice di correlazione di Pearson

$$R = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_x \sigma_y} \quad R^2 = \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2}$$

- Usato per verificare la presenza di un legame

- $|R| < 0.3$  scarsa probabilità di legame
    - $0.3 < |R| < 0.7$  moderata probabilità di legame
    - $0.7 < |R|$  ottima probabilità di legame lineare <sup>49</sup>