

Esercizi per il Corso di ALGEBRA

Foglio 2

10 ottobre 2012

1. Si scriva la permutazione

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 7 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

come prodotto di trasposizioni e si decida se σ è pari o dispari. Si determini l'ordine di σ .

(5 punti)

2. Sia S_{10} il gruppo simmetrico dato da tutte le permutazioni $\{1, \dots, 10\} \rightarrow \{1, \dots, 10\}$.

- (a) Si verifichi che S_{10} non è un gruppo abeliano.
(b) Sia $G = \{\sigma \mid \sigma \in S_{10}, \sigma\{1, 2\} = \{1, 2\}, \sigma(10) = 10\}$. Si provi che G è un sottogruppo di S_{10} . È un sottogruppo normale?
(c) Si determini l'ordine e l'indice di G .

(9 punti)

3. Sia (G, \cdot) un gruppo. Si dimostri:

- (a) L'applicazione $f : G \rightarrow G, x \mapsto x^2$ è un omomorfismo se e solo se G è abeliano.
(b) Se $x^2 = e$ per ogni $x \in G$, allora G è abeliano.

(6 punti)

4. (a) Siano $r, n \in \mathbb{N}$ e sia $\pi = (x_1, \dots, x_r)$ un ciclo in S_n .
Si verifichi che per ogni permutazione $\sigma \in S_n$ si ha

$$\sigma \circ \pi \circ \sigma^{-1} = (\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_r))$$

- (b) Si verifichi che l'insieme

$$\mathcal{V} = \{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \subset S_4$$

è un sottogruppo normale di A_4 , detto *gruppo di Klein*, che è abeliano ma non ciclico.

- (c) Si dimostri che qualunque gruppo non ciclico di 4 elementi è isomorfo a \mathcal{V} .

(9 punti)

5. Sia p un numero primo. Sia G un gruppo di ordine p^2 e N un sottogruppo normale di G di ordine p . Sia $\text{Aut}(N) = \{\varphi : N \rightarrow N \mid \varphi \text{ è un isomorfismo}\}$ e $Z(G) = \{x \in G \mid xg = gx \text{ per ogni } g \in G\}$ ($Z(G)$ è detto il *centro* di G).

- (a) Si provi che p non divide l'ordine di $\text{Aut}(N)$
(b) Si consideri l'omomorfismo $G \xrightarrow{\varphi} \text{Aut}(N), g \mapsto \varphi_g$, dove $\varphi_g(n) = g^{-1}ng$ per ogni $n \in N$. Si dimostri che $\text{Ker}\varphi = G$ e si deduca che $N \leq Z(G)$.
(c) Si provi che G è abeliano

(**)