

Verona, 9 febbraio 2011

ANALISI II
per Informatica

Candidato: _____ **Matricola:** _____

Esercizio 1 a. Dopo aver scritto l'equazione parametrica $\mathbf{C}(t)$ della parabola di equazione cartesiana

$$y = x^2,$$

si calcolino i vettori $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$ e $\mathbf{B}(t)$, e la curvatura della parabola in funzione del parametro t .

b. Quanto vale la curvatura massima, e in quale parte della parabola si trova? Si disegnino la parabola e, dopo averli determinati, i cerchi osculatori per $t = 0$ e $t = 1$.

c. Infine, posto $s(t) = 1/2 - |t/4|$, si descriva e si rappresenti la superficie parametrica 3D di equazione

$$\mathbf{S}(t, v) = \mathbf{C}(t) + s(t) \cos v \mathbf{N}(t) + s(t) \sin v \mathbf{B}(t), \quad -2 \leq t \leq 2, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

Esercizio 2 Sia S la superficie di equazione

$$z = f(x, y) = x^2 - 3y^2 + y^6.$$

a. Scrivere un'equazione del piano tangente a S nel punto $P = (1; 1; -1)$.

b. Determinare i massimi e minimi relativi di $f(x, y)$.

c. Determinare i massimi e minimi assoluti di $f(x, y)$ nel cerchio $x^2 + y^2 \leq 1$.

Esercizio 3 Si consideri il solido

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1, z \leq 4\}.$$

a. Descriverne la frontiera e calcolarne il volume (si ricorda che $z = x^2 + y^2$ è la superficie che si ottiene dalla rotazione di $z = x^2$ attorno l'asse z).

b. Servendosi del teorema della divergenza calcolare il flusso del campo $\mathbf{F} = x\mathbf{i}$ uscente da ogni superficie che delimita V .

Esercizio 4 Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}.$$

Sia Γ la curva di equazione

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Calcolare il lavoro compiuto da \mathbf{F} lungo Γ in due modi: applicando la definizione e usando il Teorema di Stokes.

Esercizio 5 Risolvere le seguenti equazioni differenziali:

a. $y'' - 3y' + 2y = 14 \sin(2x) - 18 \cos(2x)$,

b. $(x \ln x)y' + y = 3x^2$.