Matematica e Statistica

Prova d'Esame (04/02/2010)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2009/10

Matematica e Statistica

Prova d'Esame di $\boxed{\text{MATEMATICA}}$ (04/02/2010)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2009/10

Cognome-Nome ______________________________ Matr. ______________
IN STAMPATELLO

(1) Nel piano cartesiano (x, y) si scriva, in forma parametrica e cartesiana, la retta r passante per il punto $P(-2, 0)$ e ortogonale al vettore $\vec{v} = (1, 3)$. Vedendo poi il piano (x, y) come il piano $z = 0$ nello spazio cartesiano tridimensionale (x, y, z), esprimere in forma parametrica e cartesiana il piano Π parallelo a $\vec{u} = (0, 2, -1)$ e la cui intersezione col piano (x, y) è la precedente retta r. Quanto dista l'origine dal piano Π?

(2) Studiare l'andamento di $f(x) = \dfrac{|x| - e^x}{2x}$, e tracciarne il grafico[1].

(3) (a) Calcolare $\displaystyle\int_1^4 (2 - 3\sqrt{x}) \log x \, dx$ e $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg} x}{2 - \cos x} \, dx$.

(b) Disegnare $S = \{(x, y) : y\, e^x \leq 1\, ,\ x \geq |y| - 1\, ,\ x^2 \leq x + 2\}$, e calcolarne l'area.

(4) (a) Data $g(x, y) = \dfrac{x - 1 - xy}{y}$, determinarne dominio, zeri, segno e limiti interessanti, disegnando i risultati. Trovarne i punti stazionari e eventuali punti di estremo locale.

(b) Disegnare $K = \{(x, y) : y \geq x^2,\ |y - 2| \leq 1\}$ e calcolarne gli estremi assoluti di g (ci sono?)

(5) (a) Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale $y'' + 2y' + y = \sin x + 8e^x$ che, in $x = 0$, valgono $\frac{\pi}{6}$ e hanno un punto stazionario.

(b) Data l'equazione differenziale $(x - 1)y' \cos y = x \sin y$, dire se ammette soluzioni costanti; trovarne poi, come in (a), le soluzioni che, in $x = 0$, valgono $\frac{\pi}{6}$ e hanno un punto stazionario.

[1] Nello studio di zeri e segno sarà utile un confronto grafico.

Matematica e Statistica

Prova d'Esame di $\boxed{\text{STATISTICA}}$ (04/02/2010)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2009/10

Cognome-Nome ______________________________________ Matr. ______________
IN STAMPATELLO

Per ogni calcolo effettuato scrivere anche la formula teorica da utilizzare. ▸▸▸▸ **Tabella sul retro** ▸▸▸▸

ESERCIZIO 1

Data la seguente distribuzione di frequenze presentata in tabella:

x	f
4	45
8	25
9	50
11	80

Calcolare:

(a) la media aritmetica, la media armonica e la media geometrica;
(b) la mediana e la moda;
(c) la varianza usando l'origine A=3.

ESERCIZIO 2

Dati i seguenti 3 gruppi di valori:

A	B	C
1	2	2
5	5	4
6	7	
	10	

Calcolare:

(a) la media e la varianza dei singoli gruppi A, B e C;
(b) la media e la varianza del miscuglio;
(c) la media e la varianza dei gruppi presi in un unico insieme, evidenziando la relazione con la media e la varianza del miscuglio.

ESERCIZIO 3

Uno studio sull'efficacia di un farmaco su un campione di pazienti (ad alcuni dei quali è stato somministrato il farmaco vero e proprio, mentre ad altri un placebo) ha dato i seguenti risultati:

Modalità	Miglioramento	Non miglioramento
Farmaco	130	10
Placebo	20	40

Sulla base dei risultati, si può ritenere efficace il farmaco (ad un livello di significatività dell'1%)?

Allegato: Tabella “Chi Quadrato”

Valori della variabile "Chi Quadrato" che sottendono una coda destra di ammontare alpha

G.d.l.	alpha %							
	99,5	99	97,5	95	5	2,5	1	0,5
1	0,00	0,00	0,00	0,00	3,84	5,02	6,64	7,88
2	0,01	0,02	0,05	0,10	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,07	0,12	0,22	0,35	7,82	9,35	11,35	12,84
4	0,21	0,30	0,48	0,71	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,41	0,55	0,83	1,15	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,68	0,87	1,24	1,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,99	1,24	1,69	2,17	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	15,51	17,54	20,09	21,96
9	1,74	2,09	2,70	3,33	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,94	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,60	3,05	3,82	4,58	19,68	21,92	24,73	26,76
12	3,07	3,57	4,40	5,23	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,57	4,11	5,01	5,89	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,08	4,66	5,63	6,57	23,69	26,12	29,14	31,32
15	4,60	5,23	6,26	7,26	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,14	5,81	6,91	7,96	26,30	28,85	32,00	34,27
17	5,70	6,41	7,56	8,67	27,59	30,19	33,41	35,72
18	6,27	7,02	8,23	9,39	28,87	31,53	34,81	37,16
19	6,84	7,63	8,91	10,12	30,14	32,85	36,19	38,58
20	7,43	8,26	9,59	10,85	31,41	34,17	37,57	40,00
21	8,03	8,90	10,28	11,59	32,67	35,48	38,93	41,40
22	8,64	9,54	10,98	12,34	33,92	36,78	40,29	42,80
23	9,26	10,20	11,69	13,09	35,17	38,08	41,64	44,18
24	9,89	10,86	12,40	13,85	36,42	39,36	42,98	45,56
25	10,52	11,52	13,12	14,61	37,65	40,65	44,31	46,93
26	11,16	12,20	13,84	15,38	38,89	41,92	45,64	48,29
27	11,81	12,88	14,57	16,15	40,11	43,20	46,96	49,65
28	12,46	13,57	15,31	16,93	41,34	44,46	48,28	50,99
29	13,12	14,26	16,05	17,71	42,56	45,72	49,59	52,34
30	13,79	14,95	16,79	18,49	43,77	46,98	50,89	53,67
40	20,71	22,16	24,43	26,51	55,76	59,34	63,69	66,77
50	27,99	29,71	32,36	34,76	67,51	71,42	76,15	79,49
60	35,53	37,49	40,48	43,19	79,08	83,30	88,38	91,95
70	43,28	45,44	48,76	51,74	90,53	95,02	100,43	104,22
80	51,17	53,54	57,15	60,39	101,88	106,63	112,33	116,32
90	59,20	61,75	65,65	69,13	113,15	118,14	124,12	128,30
100	67,33	70,07	74,22	77,93	124,34	129,56	135,81	140,17

Soluzioni

MATEMATICA

(1) La retta r, in quanto ortogonale al vettore $\vec{v} = (1, 3)$, avrà equazione cartesiana del tipo $x + 3y + k = 0$, e il passaggio per $P(-2, 0)$ impone che $k = 2$; un vettore parallelo sarà poi $\vec{a} = (3, -1)$, dunque una forma parametrica è $r = \{(-2, 0) + t(3, -1) : t \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) = (-2 + 3t, -t) : t \in \mathbb{R}\}$. Il piano Π sarà dunque quello passante per $P(-2, 0, 0)$ e parallelo a $\vec{a} = (3, -1, 0)$ e a $\vec{u} = (0, 2, -1)$, dunque una forma parametrica sarà $\Pi = \{(-2, 0, 0) + s(3, -1, 0) + t(0, 2, -1) : s, t \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) = (-2 + 3s, -s + 2t, -t) : s, t \in \mathbb{R}\}$; sostituendo poi $t = -z$ e $s = 2t - y = -y - 2z$ in $x = -2 + 3s$ si ottiene la forma cartesiana $x + 3y + 6z + 2 = 0$. Infine, ricordando la formula, la distanza dell'origine dal piano Π è $\frac{|1\cdot 0+3\cdot 0+6\cdot 0+2|}{\sqrt{1^2+3^2+6^2}} = \frac{2}{\sqrt{46}}$.

(2) (Figura 1) La funzione $f(x) = \frac{|x|-e^x}{2x}$ è definita per $x \neq 0$, ed è ivi derivabile infinite volte. Il numeratore è ≥ 0 quando $|x| \geq e^x$, e un confronto grafico tra le due funzioni $|x|$ e e^x mostra chiaramente che esiste un punto $\alpha \in \,]-1, 0[$ (in realtà vale $\alpha \sim -0{,}55$) tale che ciò accade per $x \leq \alpha$; d'altra parte il denominatore è ≥ 0 quando $x > 0$, dunque vale $f(x) \geq 0$ per $\alpha \leq x < 0$. I limiti interessanti sono $\lim_{-\infty} f(x) = \lim_{-\infty} \frac{-x-e^x}{2x} = -\frac{1}{2}^+$ (con de l'Hôpital, o raccogliendo x sopra e sotto), $\lim_{0\mp} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{-\infty} \frac{x-e^x}{2x} = -\infty$ (con de l'Hôpital, o raccogliendo e^x sopra e x sotto): dunque $y = -\frac{1}{2}$ è asintoto orizzontale a $-\infty$, mentre essendo $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{x-e^x}{2x^2} = -\infty$ non vi è asintoto lineare a $+\infty$. Derivando si ottiene $f'(x) = \frac{(\mathrm{sign}(x)-e^x)2x-2(|x|-e^x)}{2x^2} = \frac{(1-x)e^x}{x^2}$, dunque $f'(x) \geq 0$ per $x \leq 1$: ne ricaviamo che f è strettamente crescente per $x < 0$ e $0 < x < 1$ e strettamente decrescente per $x > 1$, dunque assume un massimo locale stretto in $x = 1$ (con valore $f(1) = \frac{1-e}{2} \sim -0{,}85$). Infine, derivando ancora si ottiene $f''(x) = \frac{(-xe^x)x^2-2x(1-x)e^x}{x^4} = -\frac{(x^2-2x+2)e^x}{x^3}$, che è positiva per $x < 0$ e negativa per $x > 0$: dunque f è strettamente convessa per $x < 0$ e strettamente concava per $x > 0$.

(3) (a) Posto $x = t^2$ (da cui $dx = 2t\,dt$) si ricava $\int_1^4 (2-3\sqrt{x}) \log x\,dx = \int_1^2 (2-3t) \log t^2\, 2t\,dt = 4\int_1^2 (2t-3t^2) \log t\,dt = 4(((t^2-t^3)\log t]_1^2 - \int_1^2 (t^2-t^3)\frac{1}{t}\,dt) = 4((-4\log 2) - (0) - (\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3]_1^2)) = 4(-4\log 2 - (-\frac{2}{3}) + (\frac{1}{6})) = -4(4\log 2 - \frac{5}{6}) \sim -7{,}8$. • Posto $t = \cos x$ (da cui $dt = -\sin x\,dx$) si ha $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{tg}\,x}{2-\cos x}\,dx = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t(2-t)}(-dt) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{t(2-t)}\,dt = (\frac{1}{2}\log\frac{t}{2-t}]_{\frac{1}{2}}^{1} = (0) - (\frac{1}{2}\log\frac{1}{3}) = \frac{1}{2}\log 3 \sim 0{,}55$.

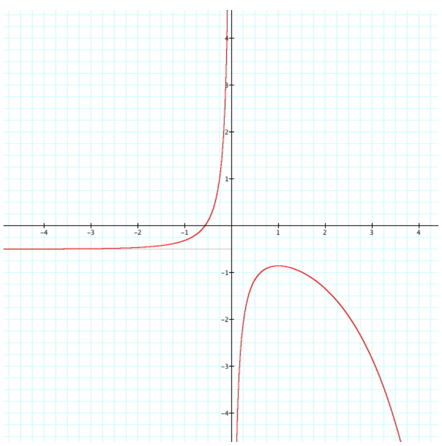
(b) (Figura 2) L'insieme $S = \{(x, y) : y\,e^x \leq 1\,,\ x \geq |y| - 1\,,\ x^2 \leq x + 2\}$ è rappresentato in figura; l'area risulta pertanto $\int_{-1}^0 (x+1)\,dx + \int_0^2 e^{-x}\,dx + \int_2^{-1} (-x-1)\,dx = (\frac{1}{2}x^2 + x]_{-1}^0 + (-e^{-x}]_0^2 + (-\frac{1}{2}x^2 - x]_2^{-1} = (0) - (-\frac{1}{2}) + (-e^{-2}) - (-1) + (\frac{1}{2}) - (-4) = 6 + \frac{1}{e^2} \sim 6{,}1$.

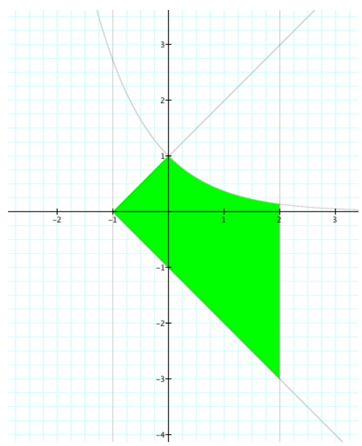
(4) (a) (Figura 3) Il dominio di $g(x, y) = \frac{x-1-xy}{y}$ è dato da $y \neq 0$ (vanno esclusi i punti dell'asse x). Si ha $g(x, y) = 0$ quando $x - 1 - xy = 0$, ovvero $xy = x - 1$: se $x = 0$ ciò è falso, mentre se $x \neq 0$ si ottiene $y = \frac{x-1}{x}$ (grafico della funzione omografica che si annulla per $x = 1$ e con asintoti $x = 0$ e $y = 1$). Per il segno, il numeratore è > 0 quando $xy < x - 1$, che per $x = 0$ è falso e per $x \gtrless 0$ equivale a $y \lessgtr \frac{x-1}{x}$ (punti sotto/sopra il grafico dell'omografica); il denominatore è positivo sopra l'asse x; e il segno di g ne segue per quoziente dei due. I limiti interessanti sono nei punti dell'asse x e in ∞_2: in un punto $(x_0, 0)$ dell'asse x diverso da $(1, 0)$ il limite vale $\pm\infty$ (infatti il numeratore tende al numero $x_0 - 1 \neq 0$, mentre il denominatore è infinitesimo), mentre in $(1, 0)$ e in ∞_2 il limite non esiste (infatti lungo l'omografica la funzione è nulla, mentre lungo la retta $x = 1$ vale costantemente 1). Le derivate parziali sono $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1-y}{y}$ e $\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{x-1}{y^2}$, dunque il sistema $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = 0$ dà l'unico punto stazionario $C(1, 1)$, che il criterio dell'hessiano rivela essere una sella (infatti $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(C) = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(C) = 0$ e $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(C) = -1$).

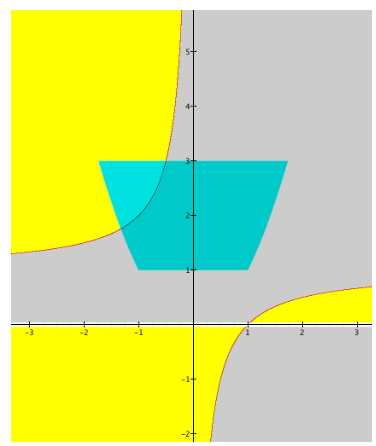
(b) (Figura 3) L'insieme $K = \{(x, y) : y \geq x^2,\ |y - 2| \leq 1\}$ è quello racchiuso tra la parabola $y = x^2$ e la striscia orizzontale $1 \leq y \leq 3$, bordi inclusi: trattandosi di un compatto (insieme chiuso e limitato) interamente contenuto nel dominio di g, che è continua, gli estremi assoluti di g su K esistono in base a Weierstrass. Per il calcolo, dividiamo K nei sottoinsiemi K_0 (punti interni, non sul bordo), K_1' (arco di parabola tra i punti $A(-\sqrt{3}, 3)$ e $D(-1, 1)$ esclusi), K_1'' (arco di parabola tra i punti $B(\sqrt{3}, 3)$ e $C(1, 1)$ esclusi), K_2' (segmento tra i punti A e B esclusi), K_2'' (segmento tra i punti C e D esclusi) e $K_3 = \{A, B, C, D\}$, e poi ragioniamo come al solito (un eventuale punto di estremo assoluto in uno dei K_j deve essere in particolare anche di estremo relativo per la restrizione di g a K_j, dunque si deve poter trovare con le tecniche usuali). • Per K_0, si è visto che l'unico punto stazionario per g è C, che però non vi sta: dunque gli estremi assoluti di g non potranno essere assunti in nessun punto di K_0. • Su K_1' si ha $g(x,x^2)=\frac{x-1-x^3}{x^2}$ con $-\sqrt{3}<x<-1$: tuttavia la derivata $\frac{2-x-x^3}{x^3}$ si annulla solo in $x=1$, che non dà un punto di K_1', dunque anche qua niente da fare. La stessa cosa vale per K_1''. • Su K_2' si ha $g(x,3)=-\frac{1+2x}{3}$ con $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$: tuttavia la derivata $-\frac{1}{3}$ non si annulla mai, dunque anche qua niente da fare. Idem per K_2''. • Infine, per K_3 si ha $g(A)=\frac{2\sqrt{3}-1}{3}\sim 0{,}8$, $g(B)=-\frac{2\sqrt{3}+1}{3}\sim -1{,}5$ e $g(C)=g(D)=-1$ • Da quanto trovato, il massimo assoluto di g su K è il valore $\frac{2\sqrt{3}-1}{3}$ (assunto in A), mentre il minimo è $-\frac{2\sqrt{3}+1}{3}$ (assunto in B).

(5) (a) L'equazione differenziale $y''+2y'+y=\sin x+8e^x$ è del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $t^2+2t+1=0$ ha soluzione doppia -1, dunque le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono del tipo $Ae^{-x}+Bxe^{-x}$ con $A,B\in\mathbb{R}$. Una soluzione particolare per $b_1(x)=\sin x$ sarà del tipo $\tilde{y}_1(x)=a\cos x+b\sin x$, e imponendo che $\tilde{y}_1''+2\tilde{y}_1'+\tilde{y}_1=\sin x$ si ottiene $(a,b)=(-\frac{1}{2},0)$, dunque $\tilde{y}_1(x)=-\frac{1}{2}\cos x$. Una soluzione particolare per $b_2(x)=8e^x$ sarà del tipo $\tilde{y}_2(x)=ae^x$, e imponendo che $\tilde{y}_2''+2\tilde{y}_2'+\tilde{y}_2=8e^x$ si ottiene $a=2$, dunque $\tilde{y}_2(x)=2e^x$. Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione data $y(x)=(A+Bx)e^{-x}-\frac{1}{2}\cos x+2e^x$, con $A,B\in\mathbb{R}$; imponendo però (come richiesto) il dato di Cauchy $(y(0),y'(0))=(\frac{\pi}{6},0)$ si trova l'unica soluzione data da $(A,B)=(\frac{\pi-9}{6},\frac{\pi-21}{6})$.

(b) Una costante $y\equiv k$ è soluzione dell'equazione differenziale $(x-1)y'\cos y=x\sin y$ se e solo se essa risolve l'equazione per ogni x, ovvero (essendo $y\equiv 0$) se e solo se $0=x\sin k$: ciò impone che $\sin k=0$ ovvero $k=2n\pi$ con $n\in\mathbb{Z}$. Pertanto le soluzioni costanti sono quelle del tipo $y\equiv 2n\pi$ con $n\in\mathbb{Z}$. Separando poi le variabili si ottiene $\operatorname{cotg} y\,dy=\frac{x}{x-1}\,dx$ da cui integrando si trova $\log|\sin y|=x+\log|x-1|+k$, e imponendo che $y(0)=\frac{\pi}{6}$ si ha che $k=-\log 2$: dunque $\log|\sin y|=x+\log|x-1|-\log 2=\log\frac{1}{2}e^x|x-1|$, da cui $|\sin y|=\frac{1}{2}e^x|x-1|$, da cui (ricordando la condizione iniziale) $\sin y=\frac{1}{2}e^x(1-x)$ e, infine, $y=\arcsin(\frac{1}{2}e^x(1-x))$. Notiamo che (per caso) questa soluzione ha anche un punto stazionario in $x=0$, ovvero $y'(0)=0$: questo si può vedere direttamente dall'equazione differenziale originale (infatti $(0-1)y'(0)\cos y(0)=0\,\sin y(0)$ dà $-\frac{\sqrt{3}}{2}y'(0)=0$ da cui $y'(0)=0$) o anche derivando la soluzione trovata (viene $y'=-\frac{xe^x}{\sqrt{4-e^{2x}(1-x)^2}}$) e calcolando in $x=0$.







1. Il grafico della funzione dell'ex. 2. **2.** L'insieme dell'ex. (3.b). **3.** Ex. 4: dominio (parte colorata), zeri (rosso), segno positivo (giallo) e negativo (grigio) della funzione g, e l'insieme K (azzurro).

ESERCIZIO 1

Sulla distribuzione di frequenze presentata in tabella, calcolare:
a) la media aritmetica, la media armonica e la media geometrica;
b) la mediana e la moda;
c) la varianza usando l'origine A=3.

x	f	x*f	f/x	ln(x)	ln(x)*f	x-3	$(x-3)^2$	$(x-3)^2$*f
4	45	180	11,25	1,3863	62,3832	1	1	45
8	25	200	3,13	2,0794	51,986	5	25	625
9	50	450	5,5556	2,1972	109,861	6	36	1800
11	80	880	7,2727	2,3979	191,8316	8	64	5120
	200	**1710**	**27,2033**	**8,0609**	**416,0621**			**7590**

a) Calcolo della media aritmetica, armonica e geometrica:

$$\mathbf{M(X)} = \frac{\Sigma\, x * f}{\Sigma\, f} = \frac{1710}{200} = \mathbf{8{,}55}$$

$$\mathbf{Ma(X)} = \frac{\Sigma\, f}{\Sigma\, f/x} = \frac{200}{27{,}2033} = \mathbf{7{,}352}$$

$$\ln(Mg(X)) = \frac{\Sigma\, \ln(x) * f}{\Sigma\, f} = \frac{416{,}0621}{200} = \mathbf{2{,}0803} \qquad \mathbf{Mg(X)} = e^{2{,}0803} = \mathbf{8{,}007}$$

b) Calcolo della mediana e della moda:

x100 =< mediana =< x101 : **me** = **9**

moda = **11**

c) Calcolo della varianza usando l'origine A=3:

$$V_A(X) = \frac{7590}{200} = \mathbf{37{,}95}$$

$$V(X) = V_A(X) - (M(X)-3)^2 = \mathbf{7{,}1475}$$

ESERCIZIO 2

Dati i seguenti 3 gruppi, calcolare:
a) la media e la varianza dei singoli gruppi;
b) la media e la varianza del miscuglio;
c) la media e la varianza dei gruppi presi in un unico insieme, evidenziando la relazione con la media e la varianza del miscuglio.

A	A^2
1	1
5	25
6	36
12	**62**

B	B^2
2	4
5	25
7	49
10	100
24	**178**

C	C^2
2	4
4	16
6	**20**

a) Calcolo della media e della varianza dei singoli gruppi:

$M(A) = \frac{12}{3} = \mathbf{4}$ $\qquad V(A) = \frac{62}{3} - 4\text{^}2 = \mathbf{4{,}6667}$

$M(B) = \frac{24}{4} = \mathbf{6}$ $\qquad V(B) = \frac{178}{4} - 6\text{^}2 = \mathbf{8{,}5}$

$M(C) = \frac{6}{2} = \mathbf{3}$ $\qquad V(C) = \frac{20}{2} - 3\text{^}2 = \mathbf{1}$

b) Calcolo della media e della varianza del miscuglio:

$$M(misc) = \frac{M(A)*n_A + M(B)*n_B + M(C)*n_C}{n_A + n_B + n_C} = \frac{4*3 + 6*4 + 3*2}{4 + 3 + 2} = \mathbf{4{,}6667}$$

$$V(misc) = \frac{V(A)*n_A + V(B)*n_B + V(C)*n_C}{n_A + n_B + n_C} + \frac{(M(A)-M_{misc})^2 *n_A + (M(B)-M_{misc})^2 *n_B + (M(C)-M_{misc})^2 *n_C}{n_A + n_B + n_C}$$

$$V(misc) = \frac{4{,}6667 * 3 + 8{,}5 * 4 + 1 * 2}{3 + 4 + 2} + \frac{(4-4{,}6667)\text{^}2 * 3 + (6-8{,}5)\text{^}2 * 4 + (3-4{,}6667)\text{^}2 * 2}{3 + 4 + 2}$$

$$= \frac{50}{9} + \frac{14}{9}$$

$$= \mathbf{7{,}1111}$$

c) Calcolo della media e della varianza dei gruppi presi in un unico insieme, evidenziando la relazione con la media e la varianza del miscuglio.

Unisco in un unico insieme X i 3 gruppi A, B e C:

X	X^2
1	1
5	25
6	36
2	4
5	25
7	49
10	100
2	4
4	16
42	**260**

$M(X) = \frac{42}{9} = \mathbf{4{,}6667}$

$V(X) = M(x^2)-m^2 = \mathbf{7{,}1111}$

La media e la varianza dei dati presi in un unico insieme X è uguale alla media e alla varianza del miscuglio.

ESERCIZIO 3

Uno studio sull'efficacia di un farmaco su un campione di pazienti (ad alcuni dei quali è stato somministrato il farmaco vero e proprio, mentre ad altri un placebo) ha dato i seguenti risultati:

Modalità	Miglioramento	Non miglioramento
Farmaco	130	10
Placebo	20	40

Sulla base dei risultati, si può ritenere efficace il farmaco (ad un livello di significatività dell'1%)?

Effettuo il test di indipendenza sui risultati della tabella a doppia entrata:

Frequenze osservate f:

f	Miglioramento	Non miglioramento	
Farmaco	130	10	**140**
Placebo	20	40	**60**
	150	**50**	**200**

Calcolo delle frequenze teoriche f* sulla base delle frequenze marginali (somme di riga * colonna divise per il totale):

f*	Miglioramento	Non miglioramento	
Farmaco	105	35	**140**
Placebo	45	15	**60**
	150	**50**	**200**

f	f*	$(f-f^*)^2/f^*$
130	105	5,9524
10	35	17,8571
20	45	13,8889
40	15	41,6667
		79,3651

Chi quadrato calcolato = 79,3651

Calcolo del Chi quadrato teorico con $\nu = (r-1)*(c-1) = (2-1)*(2-1) = 1$ g.d.l.

Chi quadrato teorico = 6,63

Poiché il Chi quadrato calcolato è maggiore del Chi quadrato teorico, si rifiuta l'ipotesi di indipendenza e si conferma la presenza di una connessione fra farmaco e risultato.