Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2009/2010
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Prova scritta per il Corso di Algebra Lineare

1 febbraio 2010

1. Dato uno spazio vettoriale V su un campo K, si definisca quando un insieme di vettori $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ è linearmente indipendente. (*3 punti*)

2. Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

   (a) Si determinino il polinomio caratteristico e gli autovalori di A. (*2 punti*)

   (b) Per ogni autovalore λ di A si determini una base dell'autospazio E_λ. (*4 punti*)

   (c) Si diagonalizzi A, cioè si trovino una matrice $P \in Gl(3, \mathbb{R})$ e una matrice diagonale $D \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tali che $P^{-1}AP = D$. (*2 punti*)

   Soluzione:

   (a) $p_A = -(x-2)^2(x-5)$

   (b) $E_2(A) =< (1,0,0)^T, (0,1,0)^T >$, $E_5(A) =< (3,1,1)^T >$

   (c) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

3. Si consideri l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+z \\ y-z \end{pmatrix}$$

   (a) Si determini la matrice A associata a f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$. (*2 punti*)

   (b) Si determini la matrice A' associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\}$ di $\mathbb{R}^2$. (*4 punti*)

   (c) Si decida (motivando la risposta) se f è un'applicazione suriettiva. (*2 punti*)

Soluzione:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $A' = P^{-1}\,A = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

(c) SI'. Poiché la matrice A ha rango 2, l'immagine $\mathrm{Im} f$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ di dimensione due e pertanto coincide con $\mathbb{R}^2$.

4. Data la matrice $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ con $2\,A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$, si determini $X \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ tale che $A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -7 & -3 \end{pmatrix}$. *(5 punti)*

Soluzione: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ e $X = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$

5. Si decida se è vero o falso il seguente enunciato (motivando la risposta):
Se $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^2$ e $U \neq 0$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$, allora $\mathcal{B} \cap U$ è una base di U. *(6 punti)*

Soluzione: FALSO. Esempio: $\mathcal{B}$ la base canonica, $U =< (1,1)^T >$. Si ha $\mathcal{B} \cap U = \emptyset$, quindi $\mathcal{B} \cap U$ non è una base di U.

Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2009/2010
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Prova scritta per il Corso di Algebra Lineare

22 febbraio 2010

1. Si enunci la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. (*3 punti*)

2. Si consideri l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-z \\ x+y \\ x \end{pmatrix}$$

   (a) Si determini la matrice A associata a f rispetto alla base canonica (su dominio e codominio). (*2 punti*)

   (b) Si verifichi che

$$\mathcal{D} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \}$$

   è una base di $\mathbb{R}^3$. (*2 punti*)

   (c) Si determini la matrice A' associata a f rispetto alla base $\mathcal{D}$ sul dominio e alla base canonica sul codominio. (*4 punti*)

   (d) Si decida se f è un'applicazione biiettiva. (*2 punti*)

Soluzione:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) La matrice P le cui colonne sono i tre vettori di $\mathcal{D}$ è invertibile (si verifica che ha rango 3, oppure $\det P \neq 0$), quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti e pertanto formano una base di $\mathbb{R}^3$.

(c) $A' = AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(d) SI'. La matrice A è invertibile (si verifica che ha rango 3, oppure $\det A \neq 0$).

3. Si decida se le seguenti matrici sono diagonalizzabili su $\mathbb{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad\qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(*6 punti*)

Soluzione: $p_A = -(x-2)^2(x+1)$ e $\lambda = 2$ è un autovalore di molteplicità algebrica 2, ma molteplicità geometrica 1. Quindi A non è diagonalizzabile.

$p_B = -x^3 + 3x^2 - 4x + 2 = -(x-1)(x^2 - 2x + 2)$ e B ha i tre autovalori distinti $1, 1+i, 1-i$, quindi è diagonalizzabile.

4. Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & \alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 & -1 \\ -1 & \alpha & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Per $\alpha = 0$ si risolva il sistema lineare omogeneo $A_0\, x = 0$. (*2 punti*)

(b) Per quali valori di α il sistema lineare $A_\alpha\, x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ha soluzione? (*5 punti*)

Soluzione:

(a) L'insieme di tutte le soluzioni è $< (0,1,1)^T >$.

(b) *Se* $\alpha \notin \{0, 1, -1\}$, allora la matrice completa $\left(A_\alpha \mid \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & \alpha & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{\alpha+1} \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$,
quindi il sistema ha soluzione (ad es. per il Teorema di Rouché - Capelli).

Per $\alpha = 0$ la matrice completa $\left(A_\alpha \mid \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
quindi il sistema ha soluzione.

Per $\alpha = 1$ la matrice completa $\left(A_\alpha \mid \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
quindi il sistema ha soluzione.

Per $\alpha = -1$ la matrice completa $\left(A_\alpha \mid \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,
quindi il sistema **non** ha soluzione.
Concludiamo che il sistema ha soluzione per tutti gli $\alpha \neq -1$.

5. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo K, e sia $f : V \to V$ un'applicazione lineare tale che $f \circ f = \mathrm{id}_V$. Si dimostri che f è un isomorfismo.

(*4 punti*)

Soluzione: Se $f \circ f = \mathrm{id}_V$, allora f è l'applicazione inversa di f e quindi f è un isomorfismo.